



# Программа, предназначенная для моделирования картины обтекания контуров плоских тел, Flow Exact 2D

## Варианты использования:

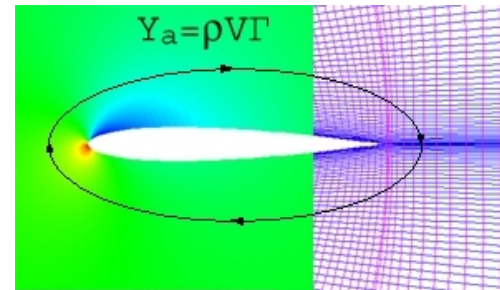
- Исследования;
- Учебный процесс;
- Демонстратор новых технологий.

## Реализованные физические модели:

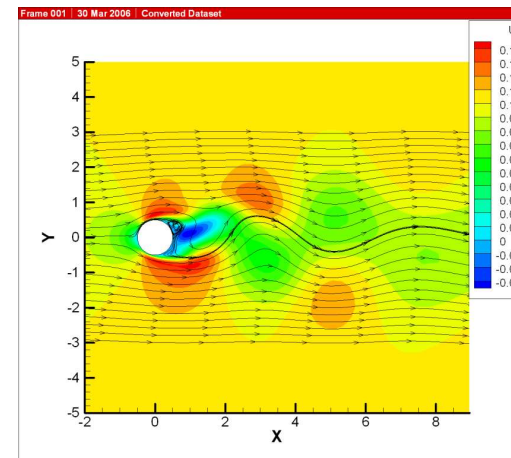
- Эйлера (ГУ непротекания);
- Навье-Стокса (ГУ прилипания);
- 10-моментная система (ГУ прилипания и скольжения).

## Используемые математические методы:

- SCM (метод расщепления матричных коэффициентов);
- FVS (метод расщепления векторов потоков);
- TD (метод полных дифференциалов).



10-ти мом. система





# Краткая характеристика кода

Модульная архитектура, открытый программный код, Fortran-90, поддержка OpenMP стандарта, обобщенные криволинейные координаты  $(\xi, \eta)$ , уравнения в обезразмеренной форме (M, Re, Pr, Kn)

## Численные методы:

- Метод конечных разностей, противопоточные схемы для конвективной части уравнений (КЧУ) и центрально-разностные для диссипативной части (ДЧУ);
- 1-3 порядок аппроксимации по пространству и времени для КЧУ;
- 2 порядок аппроксимации для ДЧУ;
- Формальное интегрирование по времени для релаксационных уравнений (компоненты тензора напряжений).

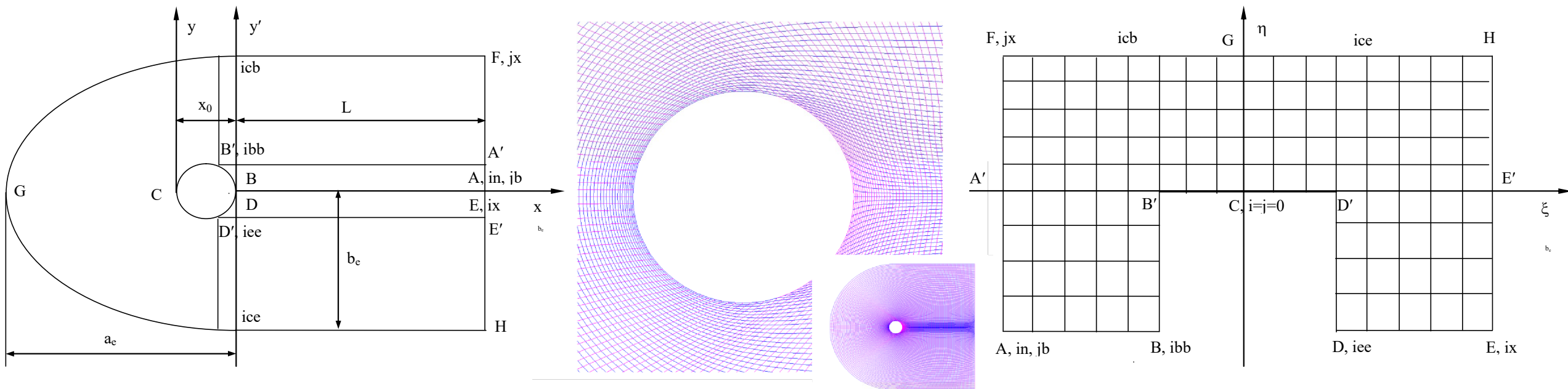
БАЗОВЫЕ МОДУЛИ:



# Модуль GRID

**Предназначен для построения структурированных сеток внутри расчетных областей различной топологии: L1, L2, O, OL, C и P (2022г.) - типов**

- Область L1 соответствует плоскому каналу; область L2 плоской пластине, область O общепринятому обозначению сеток O-топологии; область C - сеткам C-топологии; область OL - сеткам топологии O с различными граничными условиями вдоль линии склеивания расчетной области (разделительная пластина); P – 3-х блочная сетка (вихревой след за телом).
- Трансфинитная интерполляция для начального приближения;
- Решение системы уравнений эллиптического типа с заданным сгущением узлов для построения гладкой сетки.





# 10-моментная система уравнений

## Уравнение Больцмана - Общее уравнение переноса - Цепочка моментных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_n \frac{\partial f}{\partial x_n} + X_n \frac{\partial f}{\partial \xi_n} = Q(f, f), \text{ где}$$

$$Q(f, f) = \int (ff'_1 - ff_1) gbdbd\epsilon d\xi_1.$$

Здесь:

$$\rho = m \int f dc, \quad u_i = \frac{m}{\rho} \int \xi_i f dc, \quad c_i = \xi_i - u_i;$$

$$P_{ij} = m \int c_i c_j f dc, \text{ а } p_{ij} = P_{ij} - p \delta_{ij};$$

$$\text{где } p = \frac{1}{3} P_{ii}, \quad S_i = S_{ijj} = S_{jij} = S_{jji};$$

$$S_{ijk} = m \int c_i c_j c_k f dc, \quad P_{ijkl} = m \int c_i c_j c_k c_l f dc;$$

$$\psi(r) = \frac{K}{r^{n+1}}, \quad n = 4;$$

$$A = 4\pi \int_0^\infty \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \beta d\beta = 1.3682 \dots$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi f d\xi + \frac{\partial}{\partial x_n} \int \xi_n \Phi f d\xi - X_n \int \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_n} f d\xi = I_\Phi,$$

$$I_\Phi = \frac{1}{2} \int (\Phi - \Phi') (ff'_1 - ff_1) gbdbd\epsilon d\xi d\xi_1, \text{ где}$$

$\Phi(\xi)$  - некоторая функция скорости.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial u_i \rho}{\partial x_i} = 0;$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} p + \frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij} - X_i \rho = 0;$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u_k \frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{5}{3} p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \frac{2}{3} p_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{1}{3} \frac{\partial S_k}{\partial x_k} = 0;$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_k} + p_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + p_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + p_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} p_{jk} \delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial S_k}{\partial x_k} + \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_k} = I_{\psi_{ij}},$$

$$\text{где } I_{\psi_{ij}} = -3A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot p_{ij};$$

$$\frac{\partial S_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial (u_l S_{ijk} + P_{ijkl})}{\partial x_l} + S_{jkl} \frac{\partial u_i}{\partial x_l} + S_{ikl} \frac{\partial u_j}{\partial x_l} + S_{ijl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \frac{P_{jk}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_l} P_{il} - \frac{P_{ik}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_l} P_{jl} - \frac{P_{ij}}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_l} P_{kl} = I_{\psi_{ijk}},$$

$$\text{где } I_{\psi_{ijk}} = -\frac{1}{2} A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho \cdot (9S_{ijk} - S_i \delta_{jk} - S_j \delta_{ik} - S_k \delta_{ij});$$

...



# 10-моментная система уравнений

## Замыкание по Грэду:

$$f = f^0 \left[ 1 + \frac{p_{ij}}{2pRT} c_i c_j - \frac{S_i c_i}{2pRT} \left( 1 - \frac{c^2}{5RT} \right) \right],$$

$$R = \frac{k}{m}; \quad q_i = \frac{1}{2} S_i;$$

$$S_{ijk} = \frac{1}{5} (S_i \delta_{jk} + S_j \delta_{ki} + S_k \delta_{ij})$$

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + u_k \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_k} + p_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + p_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + p_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3} p_{jk} \delta_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + p \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial S_k}{\partial x_k} + \frac{1}{5} \frac{\partial (S_i \delta_{jk} + S_j \delta_{ki} + S_k \delta_{ij})}{\partial x_k} = I_{\psi_{ij}};$$

## Закон Фурье:

$$\bar{q} = -\chi \vec{\nabla} T.$$

## Другие способы (варианты):

Пусть:

$$3A \sqrt{\frac{K}{2m^3}} \cdot \rho = \frac{1}{\tau} = \nu > 10^9,$$

$$s_{ijk} = S_{ijk} - \frac{1}{9} (S_i \delta_{jk} + S_j \delta_{ki} + S_k \delta_{ij})$$

ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2022, том 62, № 3, с. 499–520

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ  
ФИЗИКА

УДК 517.95

### ВАРИАНТ ЗАМЫКАНИЯ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА<sup>1)</sup>

© 2022 г. Ю. А. Никитченко

125993 Москва, Волоколамское ш., 4, МАИ, Россия

e-mail: nikitchenko7@yandex.ru

Поступила в редакцию 18.05.2021 г.

Переработанный вариант 20.07.2021 г.

Принята к публикации 17.11.2021 г.

Предложен метод замыкания системы моментных уравнений порядка выше второго, не использующий аппроксимирующую функцию распределения молекул по скоростям. Замыкающие систему моменты построены в виде комбинаций моментов низших порядков. Построены системы моментных уравнений до шестого порядка включительно. На примере задачи о профиле ударной волны показано, что повышение порядка системы моментных уравнений не приводит к улучшению решения. Это объясняется тем, что члены уравнений замыкающего момента, которые не могут быть выражены через низшие моменты, вносят погрешность, соизмеримую с величиной замыкающего момента. Для тестирования решений использовано модельное кинетическое уравнение многоатомных газов. Библиограф. 18. Фиг. 10.





# Метод полных дифференциалов

(на примере системы уравнений Эйлера)

Умножим систему

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + A \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x} + B \frac{\partial \bar{Q}}{\partial y} + C \frac{\partial \bar{Q}}{\partial z} = 0;$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{bmatrix}; \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & u \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & 0 & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & v & 0 \\ 0 & 0 & \gamma p & 0 & v \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & 0 & \gamma p & w \end{bmatrix};$$

на матрицу  $\Omega$ , слева

$$\Omega = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix};$$

$$c^2 = \gamma \frac{p}{\rho}.$$

- Матрица  $\Omega$ ,  $\det(\Omega) \neq 0$ , должна состоять из знакопостоянных элементов, а умножение на неё системы приводить к физически согласованным уравнениям;
- Если в каком-либо уравнении эквивалентной системы ОДУ имеют место пространственные производные от компоненты вектора, то в этом же уравнении должна содержаться и частная производная по времени от этой компоненты. Обратное не обязательно.

$$c^2 \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u+c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$- \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v+c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} -$$

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v+c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$- \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} +$$

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w+c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w+c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0;$$

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} + \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right\} +$$

$$\left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{1}{\rho c} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u-c) \frac{\partial p}{\partial x} + (v-c) \frac{\partial p}{\partial y} + (w-c) \frac{\partial p}{\partial z} \right\} = 0.$$



# Метод полных дифференциалов

(отличия от ранее существующих методов)

## Связь между ПД

$$c^2 dp - dp = 0;$$

$$du \begin{vmatrix} u+c & u \\ v-dv & v-c-dw \\ w & w \end{vmatrix} + \frac{1}{\rho c} dp \begin{vmatrix} u+c \\ v-c \\ w-c \end{vmatrix} = 0;$$

$$-du \begin{vmatrix} u-c & u \\ v+dv & v+c-dw \\ w & w \end{vmatrix} + \frac{1}{\rho c} dp \begin{vmatrix} u-c \\ v+c \\ w-c \end{vmatrix} = 0;$$

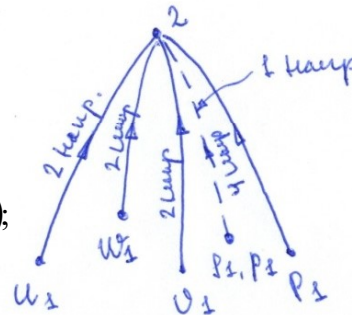
$$-du \begin{vmatrix} u-c & u \\ v-dv & v-c+dw \\ w & w \end{vmatrix} + \frac{1}{\rho c} dp \begin{vmatrix} u-c \\ v-c \\ w+c \end{vmatrix} = 0;$$

$$du \begin{vmatrix} u-c & u \\ v+dv & v-c+dw \\ w & w \end{vmatrix} - \frac{1}{\rho c} dp \begin{vmatrix} u-c \\ v-c \\ w-c \end{vmatrix} = 0;$$

- Связь с методом характеристик в случае 1D тривиальна, поскольку система уравнений вырождается в соотношения совместности вдоль характеристик. В остальных случаях имеем аналог соотношений совместности записанных вдоль различных направлений.
- С точностью до слагаемых третьего порядка малости TD метод при использовании полиномиального способа построения разностных схем дает такую же форму разностных уравнений газовой динамики, как и MC метод.

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma;$$

$$\frac{dx_i}{dt} = V_i(t, x_i);$$



$$\pm(u_2 - u_1) \pm (v_2 - v_1) \pm (w_2 - w_1) \pm \frac{2}{\gamma - 1} \cdot [c_2 - c_1] = 0.$$

$$\bar{Q}_{i,j,k}^{n+1} = \bar{Q}_{i,j,k}^n - \sigma_x A \Delta_i \bar{Q}^n + \sigma_x^\gamma A^\gamma \Delta_i^2 \bar{Q}^n - \sigma_y B \Delta_j \bar{Q}^n + \sigma_y^\gamma B^\gamma \Delta_j^2 \bar{Q}^n - \sigma_z C \Delta_k \bar{Q}^n + \sigma_z^\gamma C^\gamma \Delta_k^2 \bar{Q}^n + (\gamma - 1) \cdot (\sigma_x \sigma_y A B \Delta_{ij} \bar{q} + \sigma_y \sigma_z B C \Delta_{jk} \bar{q} + \sigma_z \sigma_x C A \Delta_{ki} \bar{q}) + O(\Delta t^2)$$

В этих уравнениях используются следующие обозначения:

$$A^\gamma = \Omega^{-1} \tilde{A}^\gamma; B^\gamma = \Omega^{-1} \tilde{B}^\gamma; C^\gamma = \Omega^{-1} \tilde{C}^\gamma,$$

где

$$\tilde{A}^\gamma = \begin{bmatrix} \text{sign}(\omega_{11}) \frac{|\tilde{a}_{11}|^\gamma}{|\omega_{11}|^{\gamma-1}} & \text{sign}(\omega_{12}) \frac{|\tilde{a}_{12}|^\gamma}{|\omega_{12}|^{\gamma-1}} & \dots & \text{sign}(\omega_{15}) \frac{|\tilde{a}_{15}|^\gamma}{|\omega_{15}|^{\gamma-1}} \\ \text{sign}(\omega_{21}) \frac{|\tilde{a}_{21}|^\gamma}{|\omega_{21}|^{\gamma-1}} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{sign}(\omega_{51}) \frac{|\tilde{a}_{51}|^\gamma}{|\omega_{51}|^{\gamma-1}} & \dots & \dots & \text{sign}(\omega_{55}) \frac{|\tilde{a}_{55}|^\gamma}{|\omega_{55}|^{\gamma-1}} \end{bmatrix},$$

аналогичный вид имеют две другие матрицы  $\tilde{B}^\gamma$  и  $\tilde{C}^\gamma$ ,

$$A_B = \Omega^{-1} \tilde{A}_B; B_C = \Omega^{-1} \tilde{B}_C; C_A = \Omega^{-1} \tilde{C}_A,$$

где

$$\tilde{A}_B = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} \tilde{b}_{11} & \tilde{a}_{12} \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{a}_{15} \tilde{b}_{15} \\ \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{15} \\ \tilde{a}_{21} \tilde{b}_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \omega_{21} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \tilde{a}_{51} \tilde{b}_{51} & \dots & \dots & \tilde{a}_{55} \tilde{b}_{55} \\ \omega_{51} & \dots & \dots & \omega_{55} \end{bmatrix},$$

также аналогичный вид имеют оставшиеся матрицы  $\tilde{B}_C$  и  $\tilde{C}_A$ .

Проинтегрируем эту систему ДУ по времени от  $t_1$  до  $t_2$  вдоль 11 траекторий (системы ОДУ).



# Метод полных дифференциалов

(случай 2D, обобщенная криволинейная система координат)

- Представление матриц коэффициентов как функций величин  $\lambda_{ij}$ :

$$\tilde{A} = \Omega A = \begin{bmatrix} c^2 U & 0 & 0 & \frac{U + c(\xi_x - \xi_y)}{\rho c} \\ 0 & U + c\xi_x & -(U - c\xi_y) & \frac{U - c(\xi_x - \xi_y)}{\rho c} \\ 0 & -(U - c\xi_x) & U + c\xi_y & \frac{U - c(\xi_x + \xi_y)}{\rho c} \\ 0 & U - c\xi_x & U - c\xi_y & -\frac{U - c(\xi_x + \xi_y)}{\rho c} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \Omega B = \begin{bmatrix} c^2 V & 0 & 0 & \frac{V + c(\eta_x - \eta_y)}{\rho c} \\ 0 & V + c\eta_x & -(V - c\eta_y) & \frac{V - c(\eta_x - \eta_y)}{\rho c} \\ 0 & -(V - c\eta_x) & V + c\eta_y & \frac{V - c(\eta_x + \eta_y)}{\rho c} \\ 0 & V - c\eta_x & V - c\eta_y & -\frac{V - c(\eta_x + \eta_y)}{\rho c} \end{bmatrix};$$

- Расположение знаков матриц  $\Omega$  и  $A$ ,  $B$  совпадают, чем обеспечивается корректный учет правила аппроксимации производных:

$$\Omega = \begin{bmatrix} c^2 & 0 & 0 & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & \frac{1}{\rho c} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} c^2 U & 0 & 0 & \frac{-U}{\rho c} \\ 0 & \lambda_{a22} & -\lambda_{a23} & \frac{\lambda_{a24}}{\rho c} \\ 0 & -\lambda_{a32} & \lambda_{a33} & \frac{\lambda_{a34}}{\rho c} \\ 0 & \lambda_{a42} & \lambda_{a43} & -\frac{\lambda_{a44}}{\rho c} \end{bmatrix}; \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} c^2 V & 0 & 0 & \frac{-V}{\rho c} \\ 0 & \lambda_{b22} & -\lambda_{b23} & \frac{\lambda_{b24}}{\rho c} \\ 0 & -\lambda_{b32} & \lambda_{b33} & \frac{\lambda_{b34}}{\rho c} \\ 0 & \lambda_{b42} & \lambda_{b43} & -\frac{\lambda_{b44}}{\rho c} \end{bmatrix}.$$





# Метод полных дифференциалов

(сравнение с SCM методом)

- Total Differential method (TD):

$$A(\lambda_{a_{ij}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2U \frac{\rho}{c}(\lambda_{a_{22}} - \lambda_{a_{32}}) & \frac{\rho}{c}(\lambda_{a_{33}} - \lambda_{a_{23}}) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{a_{22}} + \lambda_{a_{42}} & 0 & \frac{\lambda_{a_{24}} - \lambda_{a_{44}}}{\rho c} \\ 0 & 0 & \lambda_{a_{33}} + \lambda_{a_{43}} & \frac{\lambda_{a_{34}} - \lambda_{a_{44}}}{\rho c} \\ 0 & \rho c(\lambda_{a_{22}} - \lambda_{a_{32}}) & \rho c(\lambda_{a_{33}} - \lambda_{a_{23}}) & \lambda_{a_{24}} + \lambda_{a_{34}} \end{bmatrix};$$

$$B(\lambda_{b_{ij}}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2V \frac{\rho}{c}(\lambda_{b_{22}} - \lambda_{b_{32}}) & \frac{\rho}{c}(\lambda_{b_{33}} - \lambda_{b_{23}}) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{b_{22}} + \lambda_{b_{42}} & 0 & \frac{\lambda_{b_{24}} - \lambda_{b_{44}}}{\rho c} \\ 0 & 0 & \lambda_{b_{33}} + \lambda_{b_{43}} & \frac{\lambda_{b_{34}} - \lambda_{b_{44}}}{\rho c} \\ 0 & \rho c(\lambda_{b_{22}} - \lambda_{b_{32}}) & \rho c(\lambda_{b_{33}} - \lambda_{b_{23}}) & \lambda_{b_{24}} + \lambda_{b_{34}} \end{bmatrix};$$

- Split Coefficient Matrix method (SCM):

$$A(\lambda_{a_i}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{a_1} + \lambda_{a_2} & \frac{\rho}{c} \bar{\xi}_x (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) & \frac{\rho}{c} \bar{\xi}_y (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_y^2 (\lambda_{a_1} + \lambda_{a_2}) + \bar{\xi}_x^2 (\lambda_{a_3} + \lambda_{a_4}) & 0 & \frac{\bar{\xi}_x}{\rho c} (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) \\ 0 & 0 & \bar{\xi}_x^2 (\lambda_{a_1} + \lambda_{a_2}) + \bar{\xi}_y^2 (\lambda_{a_3} + \lambda_{a_4}) & \frac{\bar{\xi}_y}{\rho c} (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) \\ 0 & \rho c \bar{\xi}_x (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) & \rho c \bar{\xi}_y (\lambda_{a_3} - \lambda_{a_4}) & \lambda_{a_3} + \lambda_{a_4} \end{bmatrix};$$

$$B(\lambda_{b_i}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \lambda_{b_1} + \lambda_{b_2} & \frac{\rho}{c} \bar{\eta}_x (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) & \frac{\rho}{c} \bar{\eta}_y (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) & 0 \\ 0 & \bar{\eta}_y^2 (\lambda_{b_1} + \lambda_{b_2}) + \bar{\eta}_x^2 (\lambda_{b_3} + \lambda_{b_4}) & 0 & \frac{\bar{\eta}_x}{\rho c} (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) \\ 0 & 0 & \bar{\eta}_x^2 (\lambda_{b_1} + \lambda_{b_2}) + \bar{\eta}_y^2 (\lambda_{b_3} + \lambda_{b_4}) & \frac{\bar{\eta}_y}{\rho c} (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) \\ 0 & \rho c \bar{\eta}_x (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) & \rho c \bar{\eta}_y (\lambda_{b_3} - \lambda_{b_4}) & \lambda_{b_3} + \lambda_{b_4} \end{bmatrix};$$

Расщепление матриц коэффициентов:

$$\lambda_{a_{ij}}^+ = \frac{\lambda_{a_{ij}} + |\lambda_{a_{ij}}|}{2};$$

$$\lambda_{a_{ij}}^- = \frac{\lambda_{a_{ij}} - |\lambda_{a_{ij}}|}{2};$$

$$\lambda_{a_i}^+ = \frac{\lambda_{a_i} + |\lambda_{a_i}|}{2};$$

$$\lambda_{a_i}^- = \frac{\lambda_{a_i} - |\lambda_{a_i}|}{2};$$

$$A = A^+ + A^-; \quad B = B^+ + B^-.$$

Область применимости:

Нет принципиальных ограничений.

Только в тех случаях, когда разрешимо характеристическое уравнение.



# Метод полных дифференциалов

(особенности реализации TD метода для 10-ти моментной системы уравнений)

$$\Omega = \begin{bmatrix} c_0^2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & 1 & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \\ 0 & -1 & -1 & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} & \frac{1}{\rho c} & -\frac{1}{\rho c} \end{bmatrix};$$

- Для компонент тензора напряжений:

$$\frac{\partial p_{ij}}{\partial t} + A_{ij} + \nu p_{ij} = 0; \quad p_{ij}(t) = e^{-\int_{t_0}^t \nu(t) dt} \left[ p_{ij}(t_0) - \int_{t_0}^t A_{ij}(t) e^{\int_{t_0}^t \nu(t) dt} dt \right]$$

Схема А	Схема В
$\frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\Delta t} = -A_{ij} - \nu p_{ij}^n$	$\frac{p_{ij}^{n+1} - p_{ij}^n}{\Delta t} = -A_{ij} - \nu p_{ij}^{n+1}$
$p_{ij}^{n+1} = (1 - \Delta t \nu) p_{ij}^n - \Delta t A_{ij}$	$p_{ij}^{n+1} = \frac{1}{1 + \Delta t \nu} (p_{ij}^n - \Delta t A_{ij})$

- Структура матрицы  $\Omega$  достаточно проста, а ее элементы не изменяют знака в поле течения.
- Для усеченных уравнений задача на собственные значения еще разрешима. Но при этом элементы результирующих матриц в методе SCM знакопеременны в потоке. Например:

$$A(\lambda_i) = X \Lambda_A X^{-1};$$

$$a_{32} = -\frac{P_{xy}}{2P_{xx}} (-\lambda_4 - \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7);$$

$$a_{43} = \frac{P_{xy}}{3c_2} (\lambda_6 - \lambda_7);$$

$$a_{62} = \frac{\rho P_{xy}}{2P_{xx}} [c_1 (\lambda_4 - \lambda_5) - c_2 (\lambda_6 - \lambda_7)];$$

$$a_{34} = \frac{c_1 P_{xy}}{6} \frac{c_2 (\lambda_4 - \lambda_5) - c_1 (\lambda_6 - \lambda_7)}{c_2 P_{xx} (p + p_{xx})}.$$

- Разностная аппроксимация уравнений:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + A^+ \Delta_{\xi}^- \bar{Q} + A^- \Delta_{\xi}^+ \bar{Q} + B^+ \Delta_{\eta}^- \bar{Q} + B^- \Delta_{\eta}^+ \bar{Q} = \bar{H};$$

$$\Delta_{\xi}^- q = d(1)q_{i+1} + d(2)q_i + d(3)q_{i-1} + d(4)q_{i-2};$$

$$\Delta_{\xi}^+ q = -d(1)q_{i-1} - d(2)q_i - d(3)q_{i+1} - d(4)q_{i+2}.$$

$$c_0^2 = \frac{p - p_{xx} - p_{yy}}{\rho}$$

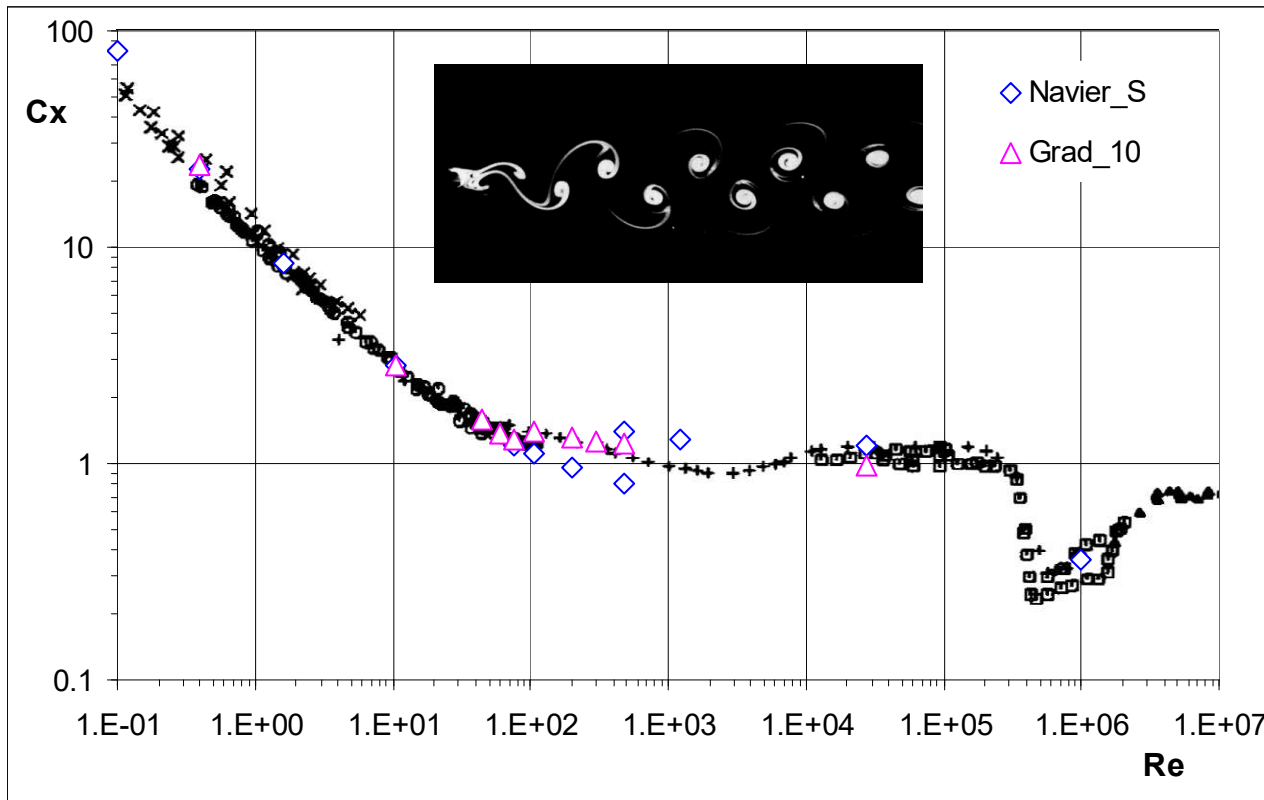
$$c^2 = \frac{p}{\rho}$$



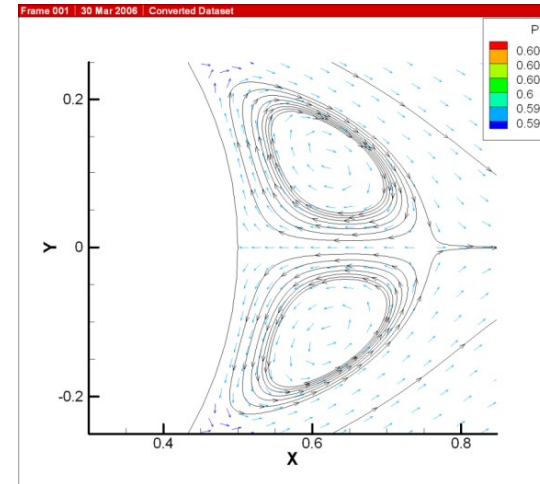
# Проблемные задачи

(обтекание кругового цилиндра)

- Кривая сопротивления цилиндра

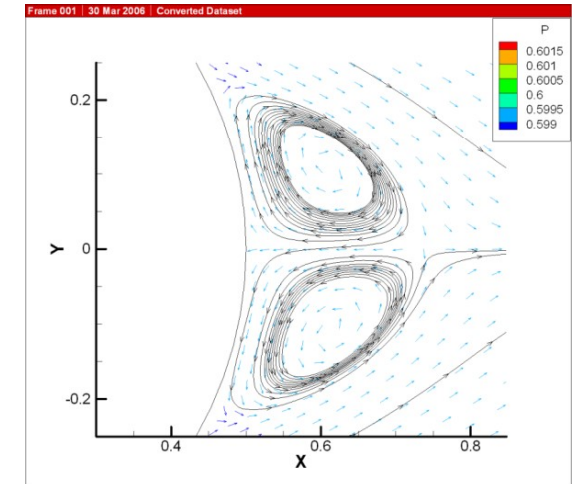


- Уравнения Н-С,  $Re=10.5$

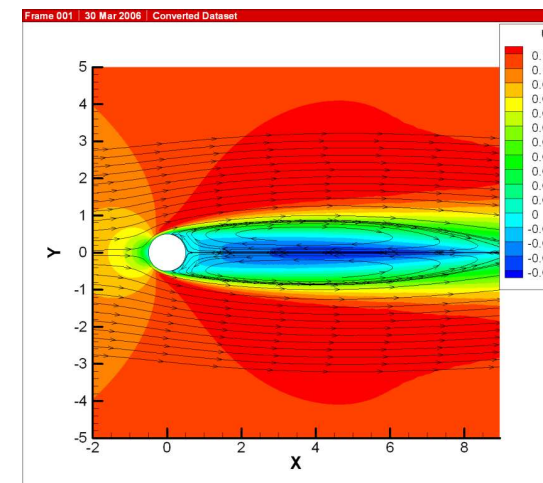


Уравнения Навье - Стокса

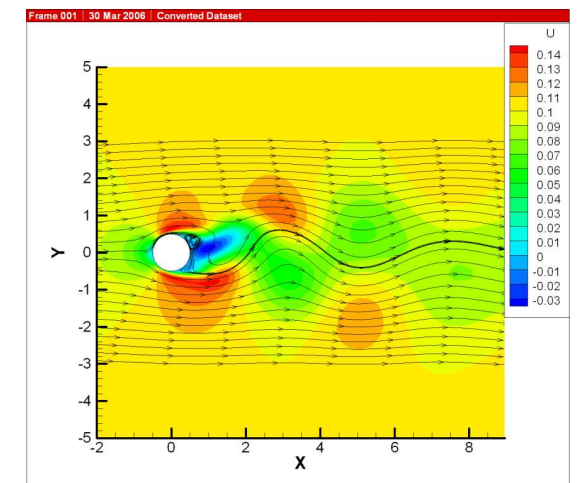
- 10-ти моментная система,  $Re=10.5$



10-ти мом. система



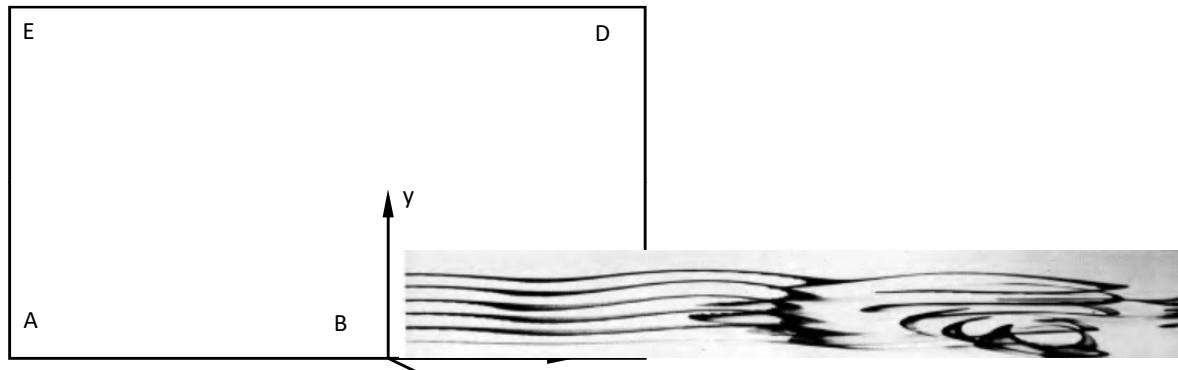
Продольная компонента скорости  $v_x$ ,  $Re=484$ .





# Проблемные задачи

(волны Толмина-Шлихтинга на плоской пластине)



## Факторы, влияющие на решение:

- Физико-математическая модель (НСФ&Грэд);
- Метод (SCM&TD);
- Разностная схема.

## Граничные условия:

- На АЕ задаются условия невозмущенного потока, но при этом приходится “смягчать” давление и напряжения  $\frac{\partial^2 \bar{f}}{\partial x^2} = 0$ , где  $\bar{f} = (p, p_{ij})$
- На АВ и DE ставятся условия симметрии на первую производную  $\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = 0$ , здесь  $\bar{f} = (\rho, u, p, p_{ij})$   
На АВ дополнительно компонента  $v = 0$ .
- На CD ставятся полностью “мягкие” граничные условия.
- На ВС задаются условия прилипания, либо условия скольжения

$$u_x = -\frac{\sqrt{2\pi RT}}{2} \frac{p_{xy}}{p} - \frac{Kn}{Pr} \frac{q_x}{5p}$$

NAVIER\_S  
(SCM)

NAVIER\_S  
(TD)



GRAD  
(TD)





# Новые технологии

- Модель учета многоатомности газов (коэффициент объемной вязкости, кинетика и гидродинамика);
- Метод замыкания системы моментных уравнений произвольного порядка (вид ФР не задается);
- Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель (области сильной неравновесности);
- Система модельных кинетических уравнений для многокомпонентного газа;

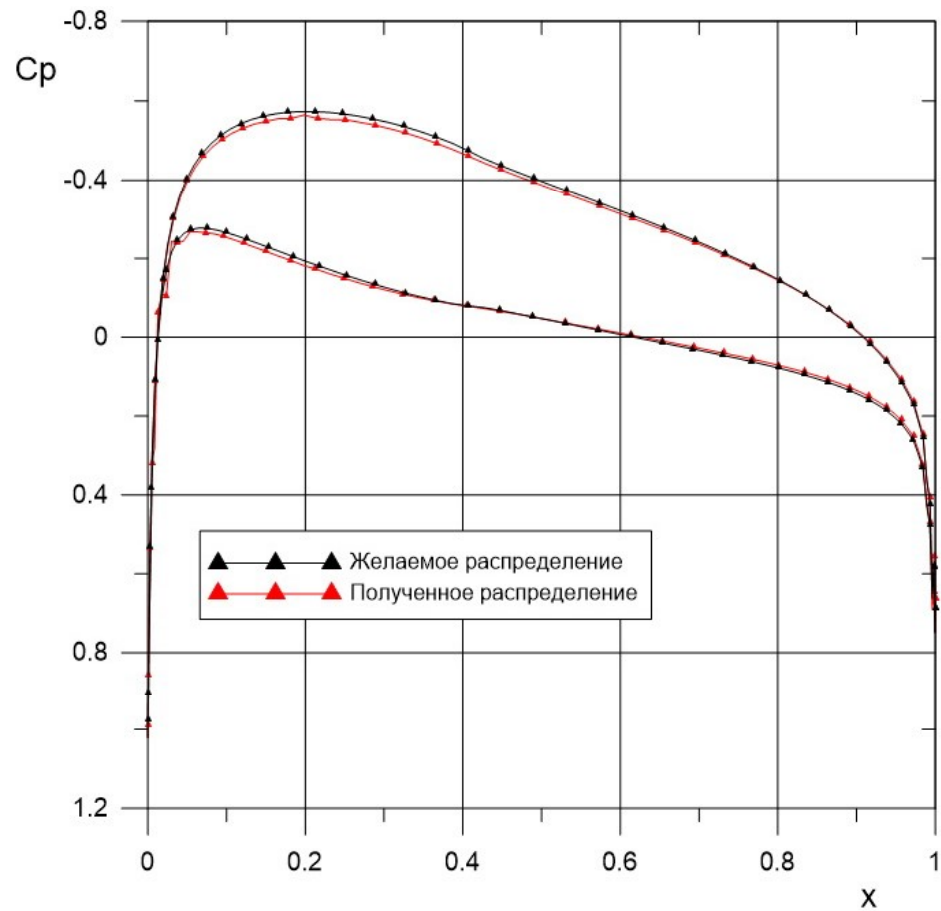
Простые геометрии





# Практическое применение

(обратная задача для профиля)



```
rem Пакетный файл автоматического запуска процедуры к
rem @echo off

for /l %%x in (1,1,3) do (

rem Коррекция ошибки
start "Inverse_S" /d "E:\Inverse_P\" /min /wait Inverse_S.exe
echo Inverse_S.exe

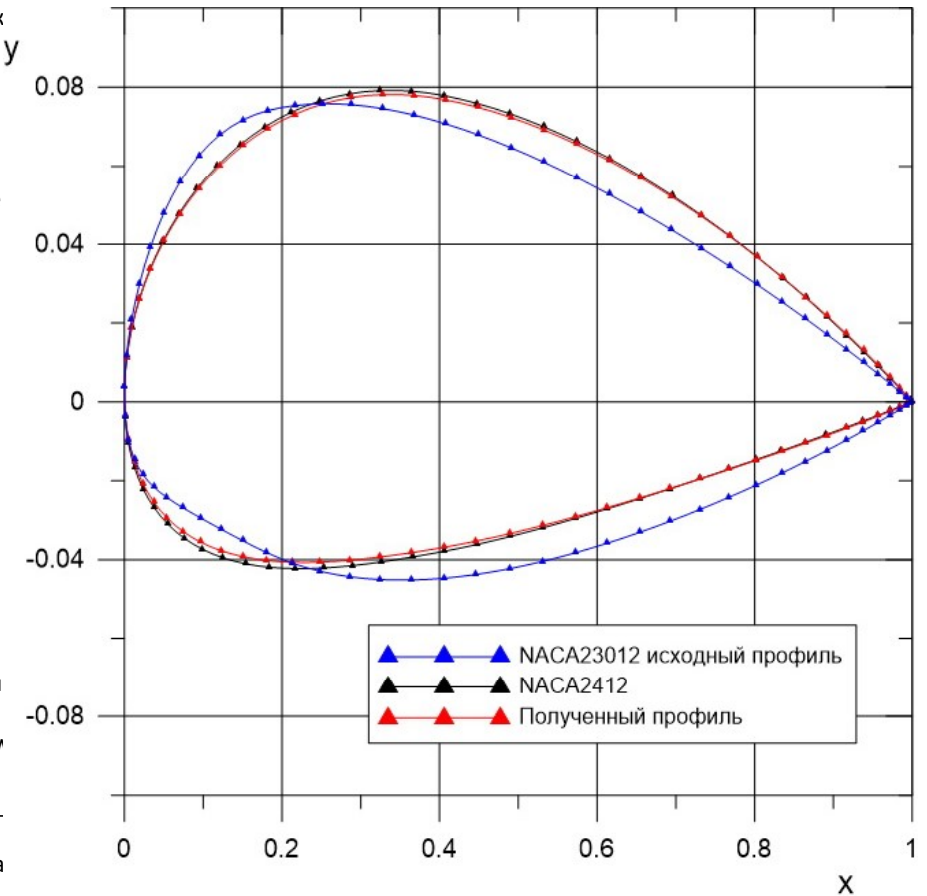
rem Внешний контур расчетной области
start "O" /d "E:\Grid\O\1D\" /min /wait O.exe
echo O.exe

rem Генерация новой сетки
echo Mesh generation
start "Tfinit" /d "E:\Grid\O\2D\" /min /wait Tfinit.exe
echo Tfinit.exe
start "Poisson" /d "E:\Grid\O\2D\" /min /wait Poisson.exe
echo Poisson.exe
start "Metrics" /d "E:\Grid\O\2D\" /min /wait Metrics.exe
echo Metrics.exe

rem Расчет течения и определение нового распределения
echo Solver
start "Freeflow" /d "E:\Navier_S\O\Scm\" /min /wait Freeflow
echo Freeflow.exe
start "NavieS_2" /d "E:\Navier_S\O\Scm\" /min /wait NavieS_
echo NavieS_2.exe
start "Summary" /d "E:\Navier_S\O\Scm\" /min /wait Summa
echo Summary.exe

)

pause
exit
```







# Публикации

1. Попов С.А. Моделирование течений сжимаемого газа на основе метода полных дифференциалов // Математическое моделирование, 2005, том 17, N 3, С.99-119.
2. Попов С.А. Метод полных дифференциалов для численного решения гиперболических систем уравнений // Электронный журнал “Труды МАИ”, 2006, вып. 22, 19 с.
3. Попов С.А. Математическое моделирование отрывных и нестационарных течений // Электронный журнал “Труды МАИ”, 2006, вып. 22, 19 с.
4. Никитченко Ю.А. О целесообразности учета коэффициента объемной вязкости в задачах газовой динамики // Известия Российской академии наук. Механика жидкости и газа. 2018. № 2. С. 128-138.
5. Никитченко Ю.А., Попов С.А., Тихоновец А.В. Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель течения многоатомного газа // Математическое моделирование. 2019. Т. 31. № 2. С. 18-32.
6. Никитченко Ю.А. Вариант замыкания системы моментных уравнений произвольного порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 3. С. 499-520.
7. Никитченко Ю.А., Попов С.А., Сергеева Н.И. Система модельных кинетических уравнений для многокомпонентного газа // Теплофизика высоких температур, статья будет опубликована в одном из ближайших номеров (Mi tvt11864)