



Развитие INMOST: метод конечных объемов для ГРП и параллельная динамическая адаптация

Кирилл Терехов¹

¹Институт Вычислительной Математики им. Г.И. Марчука Российской Академии Наук

CFD-Weekend, 30 ноября 2019

I. INMOST



INMOST

INMOST аббревиатура:

- Integrated
- Numerical
- **Modeling** and
- Object-oriented
- Supercomputing
- Technologies
- Интегрированные
- Объектно-ориентированные
- Суперкомпьютерные
- Технологии
- Численного
- **Моделирования**

Широкий функционал:

- Операции над распределенными сетками и сеточными данными.
- Методы модификации распределения сеток.
- Решение распределенных систем линейных уравнений.
- Автоматическое дифференцирование, линейная алгебра.
- ...

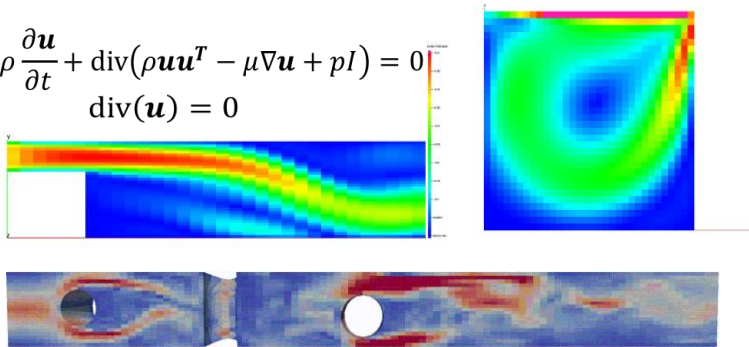


INMOST: Модели

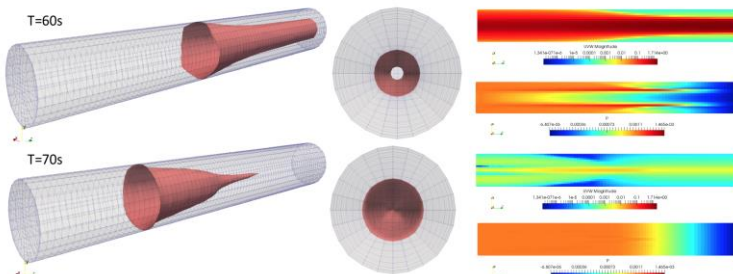
Течения

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \mu \nabla \mathbf{u} + p \mathbf{l}) = 0$$

$$\text{div}(\mathbf{u}) = 0$$



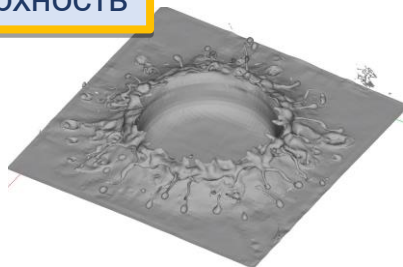
Образование тромба



Свободная поверхность

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div}(\varphi \mathbf{u}) = 0$$

$$|\nabla \varphi| = 1$$

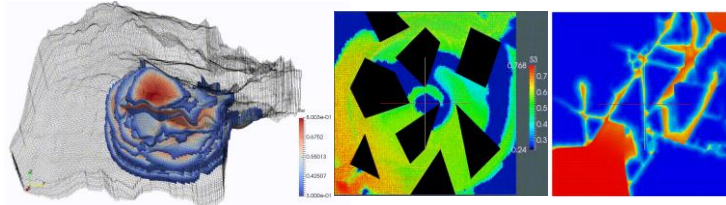


Многофазная фильтрация

$$\frac{\partial \rho_w \theta S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda_w \mathbb{K}(\nabla p - \rho_w g \nabla z)) = q_w$$

$$\frac{\partial \rho_o \theta S_o}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda_o \mathbb{K}(\nabla p - \nabla P c_o - \rho_w g \nabla z)) = q_o$$

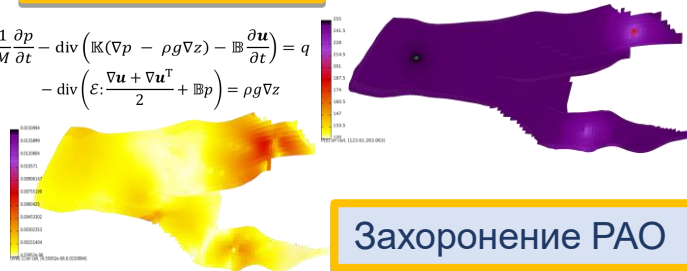
$$\frac{\partial \rho_g \theta (R S_o + S_g)}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda_g \mathbb{K}(\nabla p - \nabla P c_g - \rho_g g \nabla z)) = q_g$$



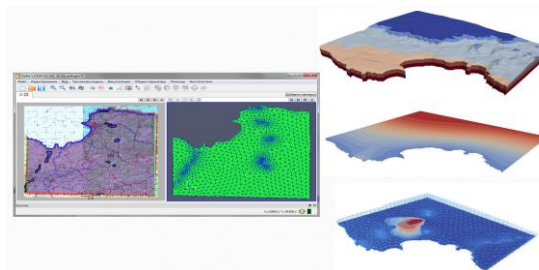
Поромеханика

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - \text{div}(\mathbb{K}(\nabla p - \rho g \nabla z) - \mathbb{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) = q$$

$$-\text{div}(\boldsymbol{\varepsilon}; \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} + \mathbb{B} p) = \rho g \nabla z$$

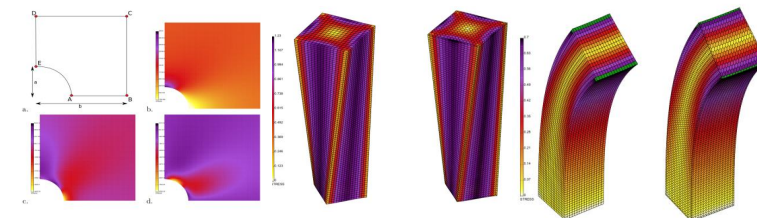


Захоронение PAO

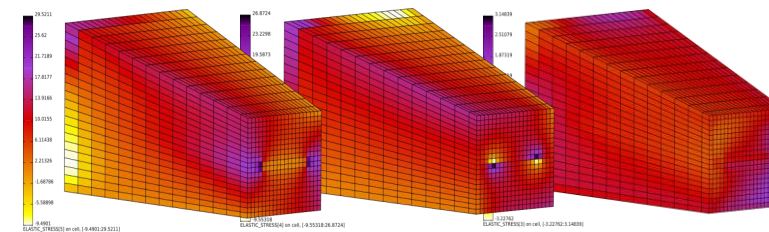


Механика

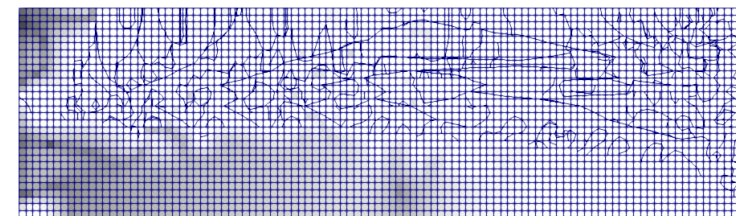
$$-\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \mathbb{C}: \boldsymbol{\sigma} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$



Контактная механика



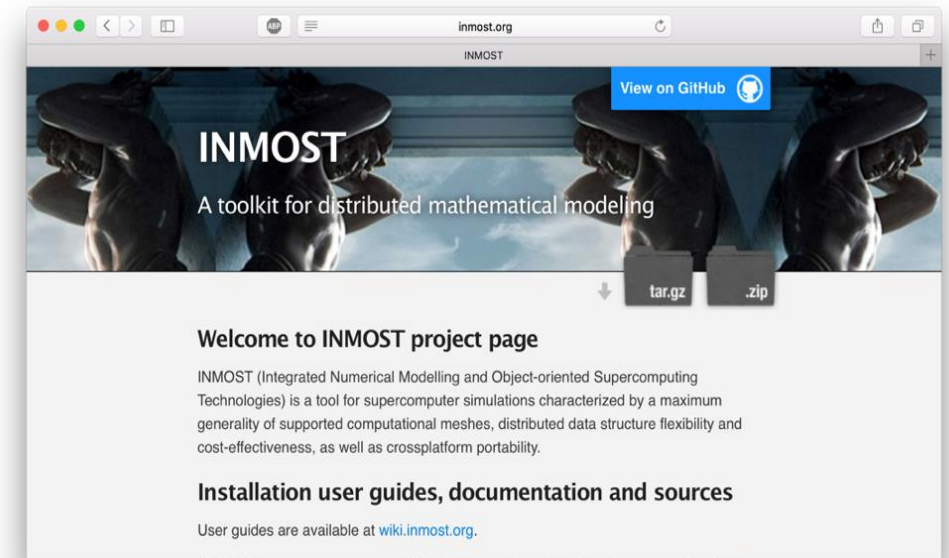
Разрушение





INMOST: Информация

- Проект с открытым исходным кодом
 - Поддерживается
 - Платформено-независим
 - Множество **примеров** и **инструментов**
 - **BSD**-лицензия
- Компилируется с использованием **cmake**
- Управляется посредством **git**
 - <http://github.com/INMOST-DEV/INMOST>
 - <http://boogie.inm.ras.ru/terekhov/INMOST>
- Короткий адрес проекта: <http://www.inmost.org>
- Документация **Doxygen**: <http://doxy.inmost.org>
- Документация **Wiki**: <http://wiki.inmost.org>



II. МКО для ГРП

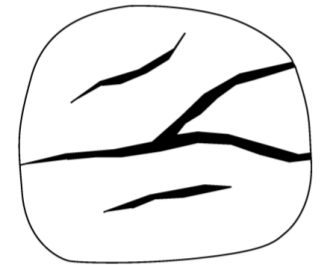
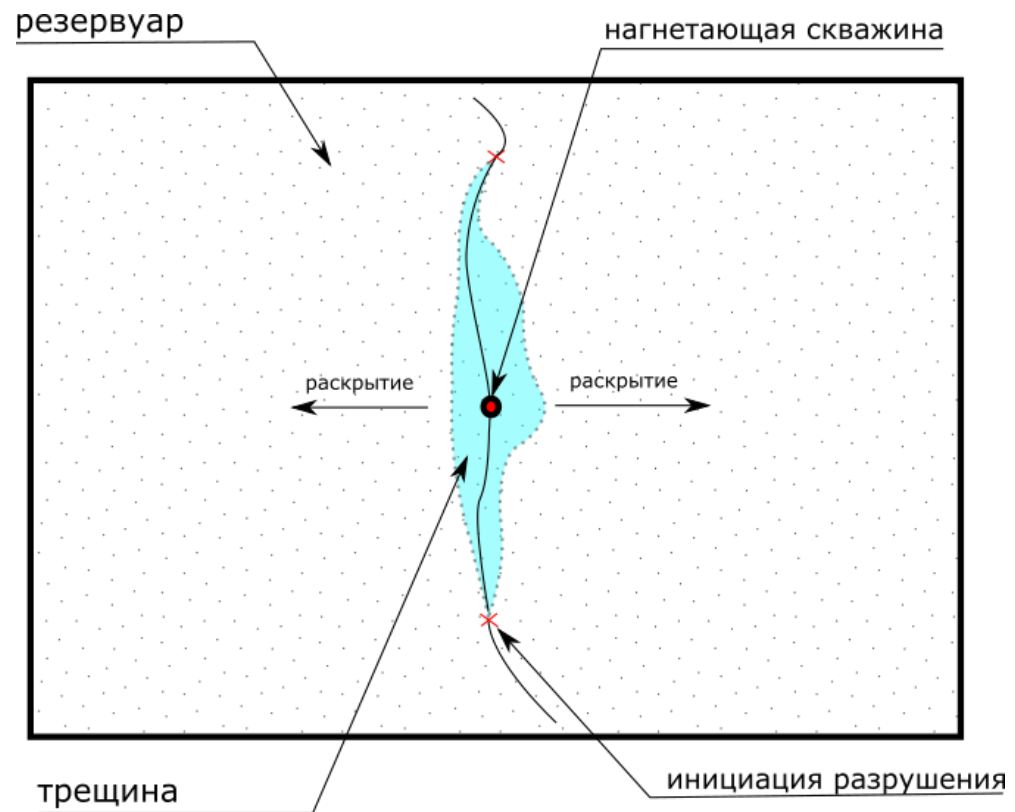


Семинар Роснефти по ГРП

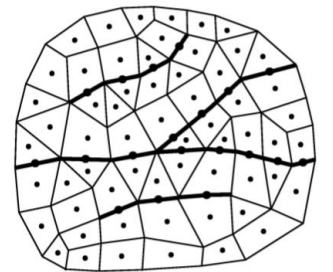


Цели: ГРП в резервуаре

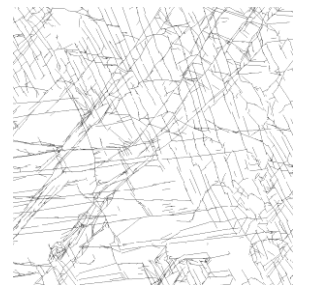
- Резервуар имеет **масштаб в километрах**, интересует моделирование на **сутки** или **часы**
- Крупные естественные или искусственные трещины представляются **двумерными объектами**
- Характеризуется изменением параметров: **апертуры, проницаемости, площади контакта**



Схематичное представление трещин



Представление на сетке

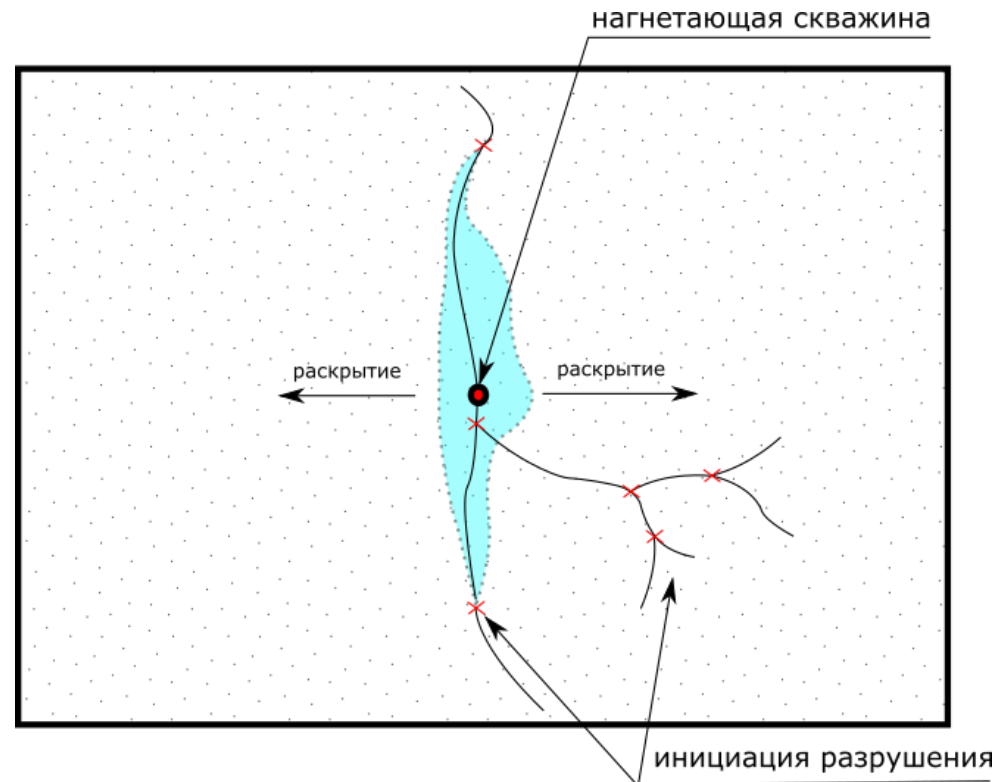


Трещины в резервуаре



Цели: рост трещин

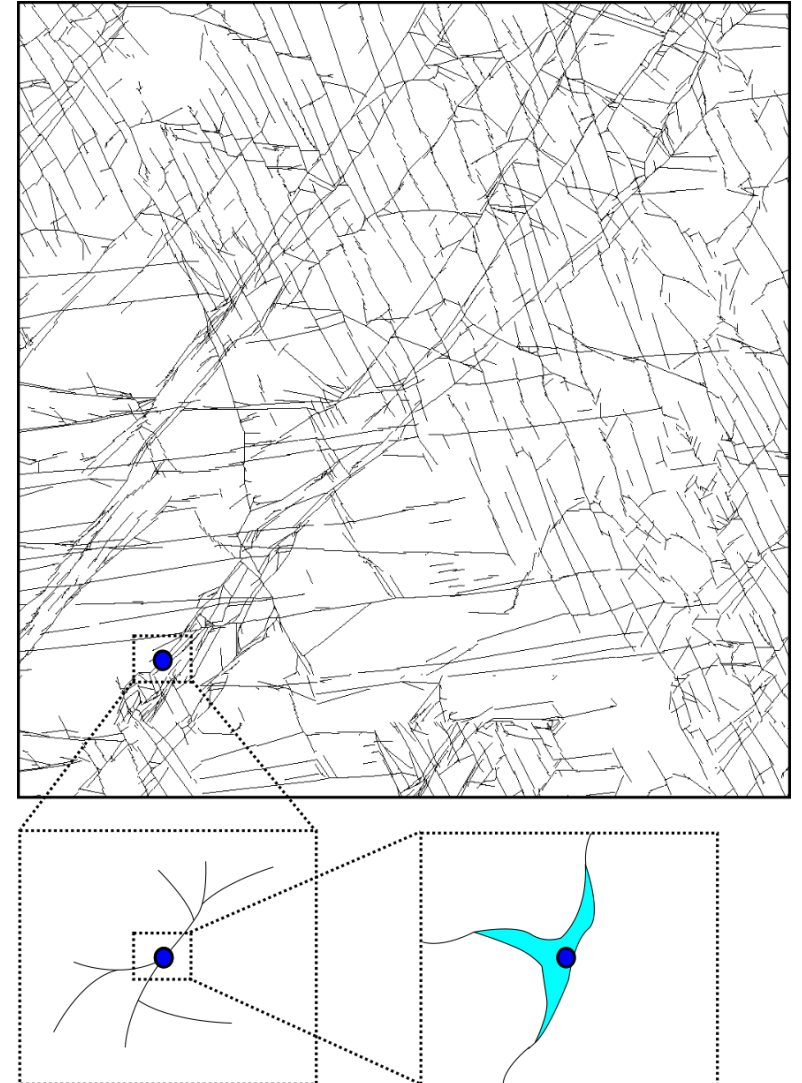
- Зона возле скважины имеет **масштаб метров**, интересует моделирование роста трещины на **минуты** и **доли секунды**
- Трещина образуется квази-стационарно согласно критерию критического растягивающего напряжения





Цели: многомасштабная модель

- Совмещение моделей:
 - моделирование крупных естественных и образовавшихся трещин на **масштабе** резервуара: трещины как **границы** или **двумерные подсеточные особенности**
 - моделирование роста трещин **метровых** размеров в зоне при скважинах, **скалывание** и **перестроение** сетки для роста
 - Моделирование образования трещин **сантиметровых** размеров у скважины с помощью **функции уровня**





Постановка задачи

- Порода подчиняется закону **пороупругости** (уравнения **Био**):

$$-\operatorname{div} \left(\varepsilon : \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} + \mathbb{B}p \right) = \rho g \nabla z$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\mathbb{K}(\nabla p - \rho g \nabla z) - \mathbb{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = q$$

- Зона раскрытия трещины подчиняется закону **Дарси**:

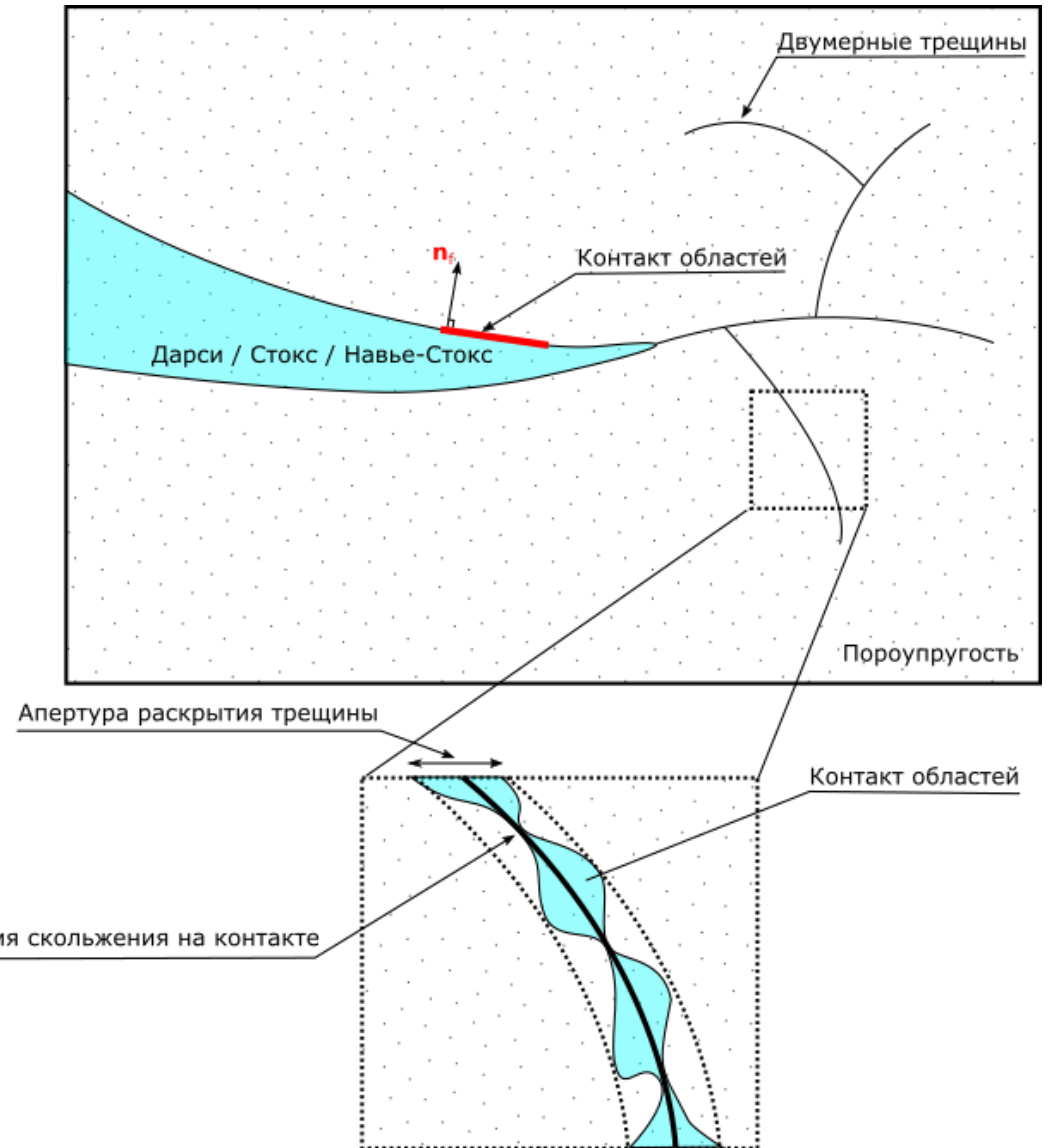
$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbb{K}(\nabla p - \rho g \nabla z)) = q$$

- На закрытой трещине ставится условие **скольжения** на контакте:

$$\left[\mathbf{n}^T \left(-\varepsilon \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} + \mathbb{B}p \right) \mathbf{n} \right] = 0, \quad (\mathbb{I} - \mathbf{n} \mathbf{n}^T) \left(-\varepsilon \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} + \mathbb{B}p \right) \mathbf{n} = 0$$

$$[\mathbf{n}^T \mathbf{u}] = 0$$

- Трещина характеризуется **апертурой** максимального раскрытия и **площадью контакта**.





Метод конечных объемов

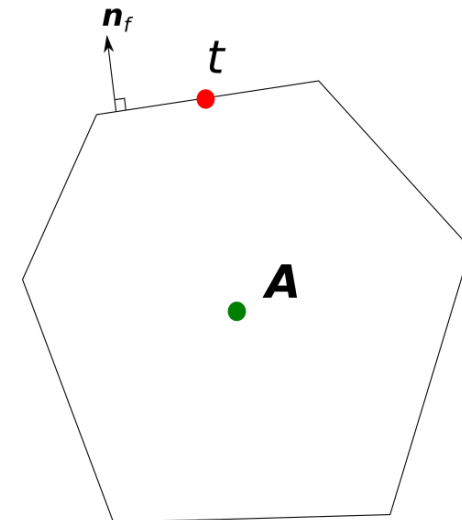
- Теорема Гаусса-Грина:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = \mathbf{g} \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathbf{g} dV \quad \Rightarrow \quad \sum_{f \in \mathcal{F}(V)} \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{n}_f |f| = \mathbf{g} |V|$$

- Требуется аппроксимация потока на грани:

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{n}_f$$

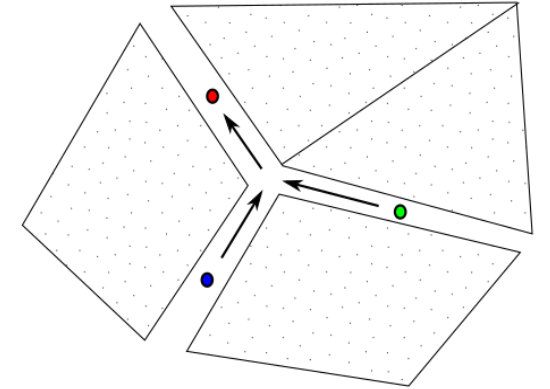
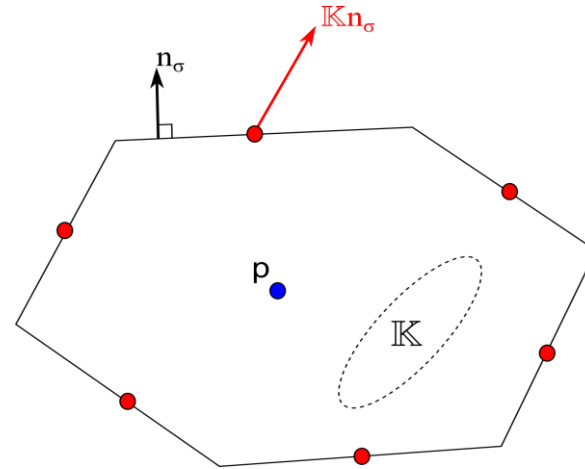
- Какой поток?
 - Поток Дарси (для многофазных течений)
 - Внутренний вектор тяги (для задачи упругости и контакта)
 - Комбинация из вектора тяги и потока Дарси (для задачи пороупругости)
 - Среда характеризуется гетерогенными свойствами



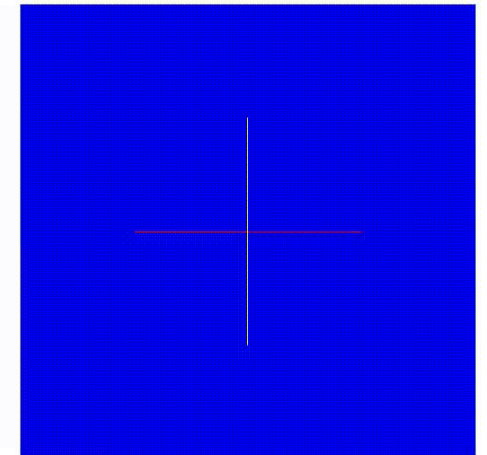
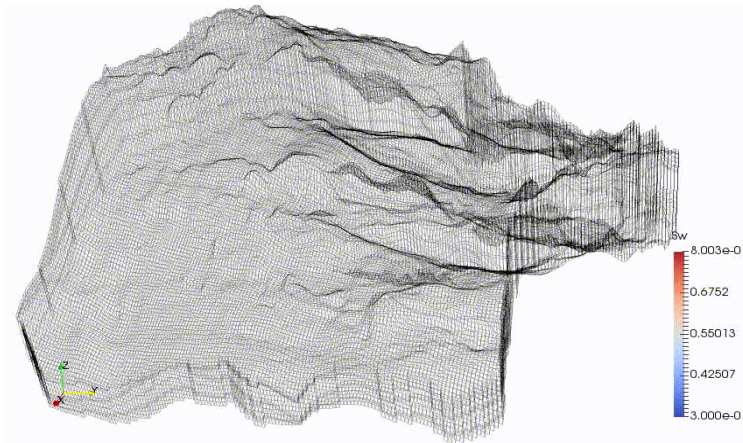


МКО для зоны Дарси и трещин

- Система:
$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbb{K}(\nabla p - \rho g \nabla z)) = q$$
- Поток:
$$f = \mathbf{n}^T \mathbb{K}(\nabla p - \rho g \nabla z)$$
- Из условий равенства потоков и давления на грани и из условия Кирхгофа на пересечении трещин получаются:
 - Единственное выражение на поток
 - Метод интерполяции с учетом гравитации



Условия Кирхгофа на трещине



Пример переноса насыщенности

К.М. Terekhov, В.Т. Mallison, and Н.А. Tchepeli. *Cell-centered nonlinear finite-volume methods for the heterogeneous anisotropic diffusion problem*. Journal of Computational Physics, 2017.

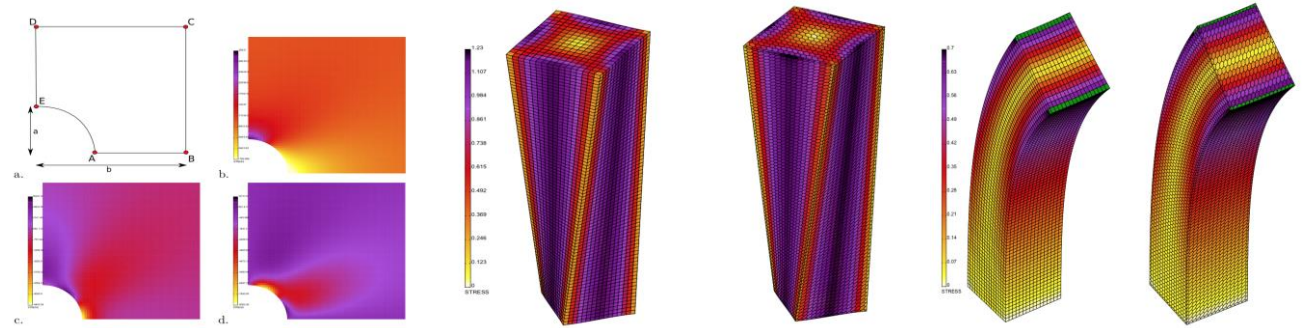


МКО для упругости и контакта

- Система: $-\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0,$

$$\mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$
- Поток:

$$\mathbf{t} = (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T) \mathbb{E}(\nabla \otimes \mathbf{u})$$



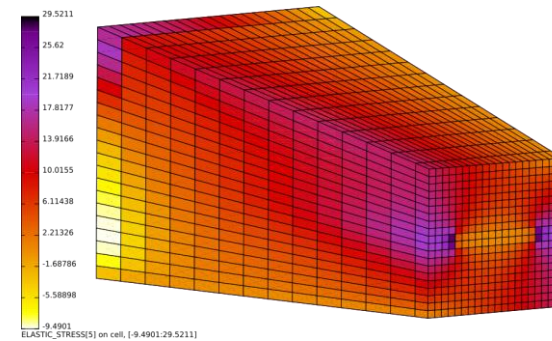
Нагрузка

Скручивания

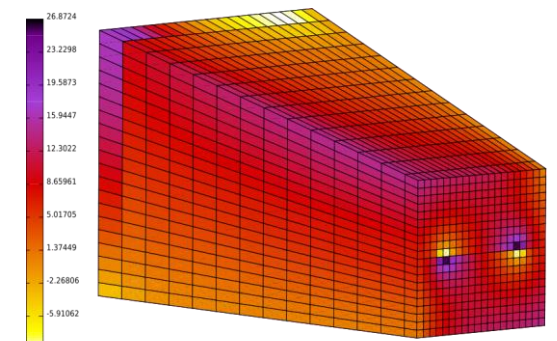
Сгибания

- Аналогично диффузии из условия равенства потоков и смещения на границе или из условий скольжения получим:

- Единственное выражение на поток
- Метод интерполяции с учетом всех условий

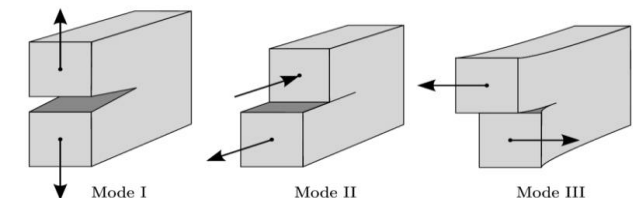


σ_{xy}



σ_{xz}

Виды контакта:



К.М. Terekhov, and Н.А. Tchepeli. *Cell-centered finite-volume method for elastic deformation of heterogeneous media with full-tensor properties.* Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020



МКО для пороупругости и стабилизация

- Система:

$$-\operatorname{div} \left(\varepsilon: \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} + \mathbb{B}p \right) = \rho g \nabla z$$

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div} \left(\mathbb{K}(\nabla p - \rho g \nabla z) - \mathbb{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right) = q$$

- Поток:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{B}\mathbf{n} \\ \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{B}\mathbf{n})^T & \mathbb{B}\mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} - (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T) \begin{bmatrix} \mathbb{E} \\ \frac{1}{\mu} \mathbb{K} \end{bmatrix} (\mathbb{I} \otimes \nabla) \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_f g \mathbf{n}^T \frac{1}{\mu} \mathbb{K} \nabla z - \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{B}\mathbf{n})^T \mathbf{u}^n \end{bmatrix}$$

- Проблема **устойчивости** Ладыженской-Бабушки-Бреци и её решение:

$$\begin{matrix} \text{не определенная} & \text{положительно полуопределенная} & \text{отрицательно полуопределенная} \\ \begin{bmatrix} 1 & \mathbb{B}\mathbf{n} \\ \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{B}\mathbf{n})^T & \mathbb{B}\mathbf{n} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{\xi \sqrt{\Delta t}} \frac{\mathbb{B}\mathbf{n}(\mathbb{B}\mathbf{n})^T}{\sqrt{(\mathbb{B}\mathbf{n})^T \mathbb{B}\mathbf{n}}} & \mathbb{B}\mathbf{n} \\ \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{B}\mathbf{n})^T & \frac{\xi}{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{(\mathbb{B}\mathbf{n})^T \mathbb{B}\mathbf{n}} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\xi \sqrt{\Delta t}} \frac{\mathbb{B}\mathbf{n}(\mathbb{B}\mathbf{n})^T}{\sqrt{(\mathbb{B}\mathbf{n})^T \mathbb{B}\mathbf{n}}} & \mathbb{B}\mathbf{n} \\ \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{B}\mathbf{n})^T & -\frac{\xi}{\sqrt{\Delta t}} \sqrt{(\mathbb{B}\mathbf{n})^T \mathbb{B}\mathbf{n}} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

- Из условия равенства потоков, давления и смещения на границе получим:

- Единственное выражение на поток
- Метод интерполяции с учетом всех условий

K.M. Terekhov. *Cell-centered finite-volume method for heterogeneous anisotropic poromechanics problem*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020

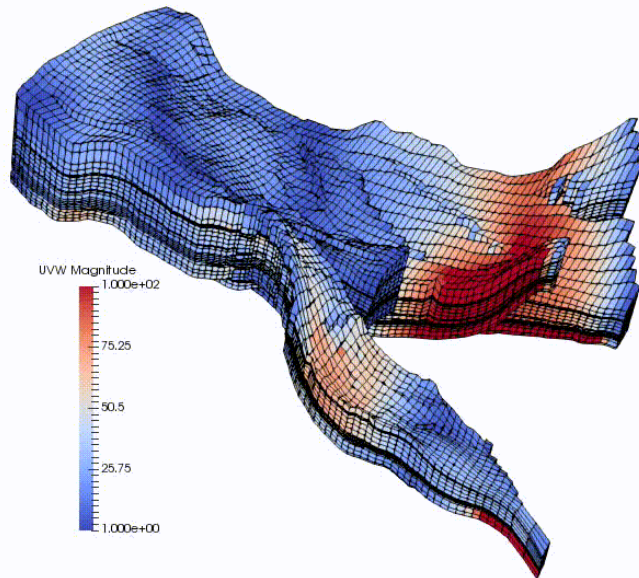
K.M. Terekhov and Yu. V. Vassilevski. *Finite volume method for coupled subsurface flow problems, I: Darcy problem*, Journal of Computational Physics, 2019



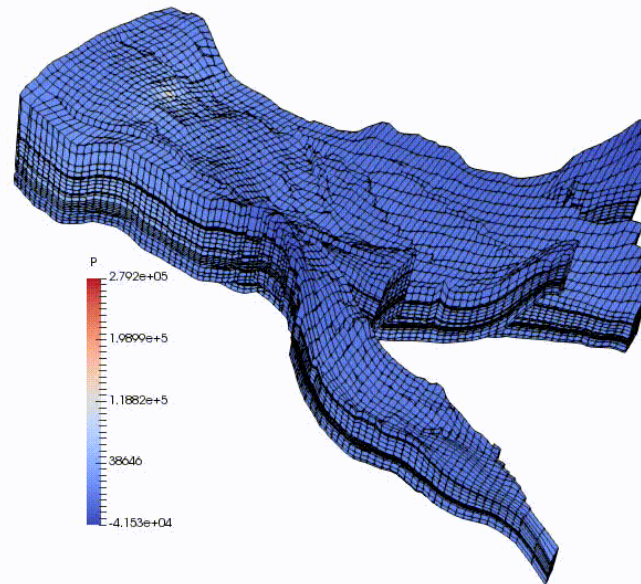
МКО для пороупругости и стабилизация

- Задача с реальной геометрией месторождения Норна и синтетическими параметрами Био, модуля Юнга и отношения Пуассона:

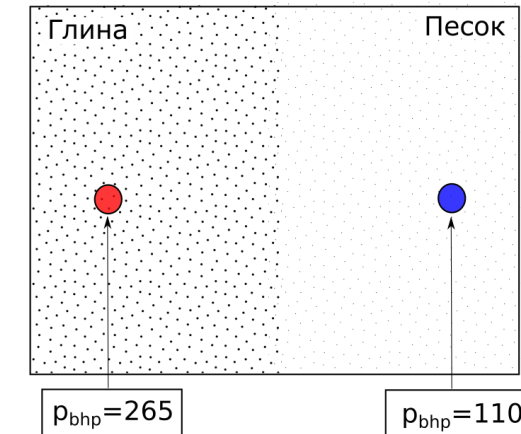
- Простая задача с двумя скважинами:



Смещения

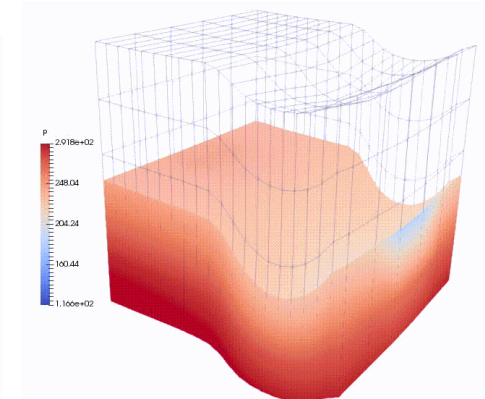
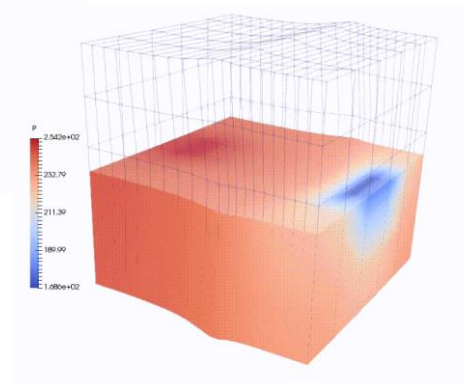


Давление



без гравитации

с гравитацией

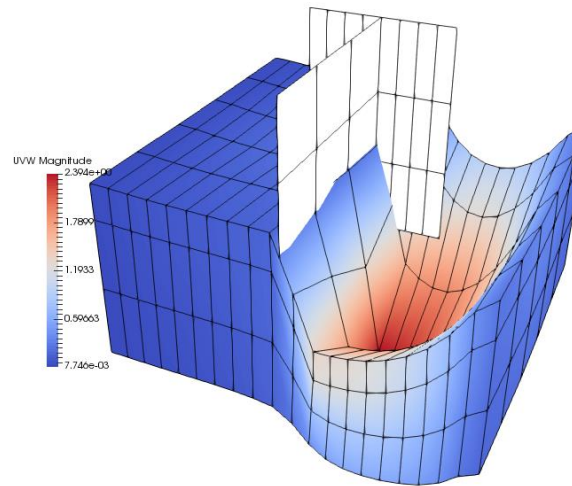
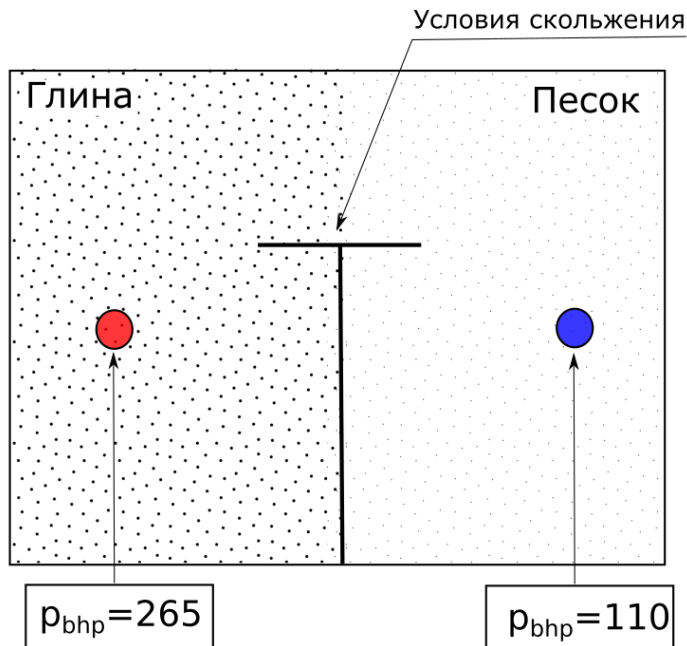




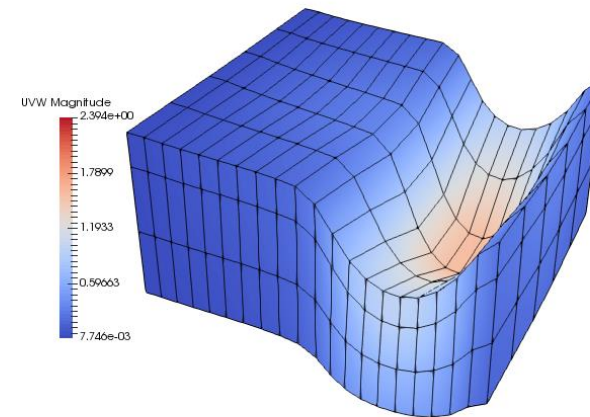
МКО для пороупругости со скольжением

- Выражения на поток и интерполяцию выводятся при дополнительных условиях

$$\left[\mathbf{n}^T \left(-\varepsilon \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} + \mathbb{B}p \right) \mathbf{n} \right] = 0, \quad (\mathbb{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^T) \left(-\varepsilon \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} + \mathbb{B}p \right) \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad [\mathbf{n}^T \mathbf{u}] = 0$$



смещения с трещиной



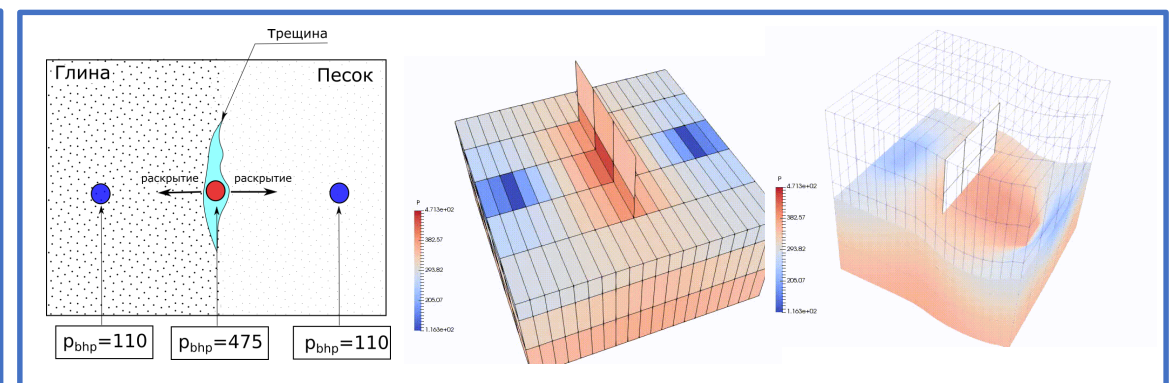
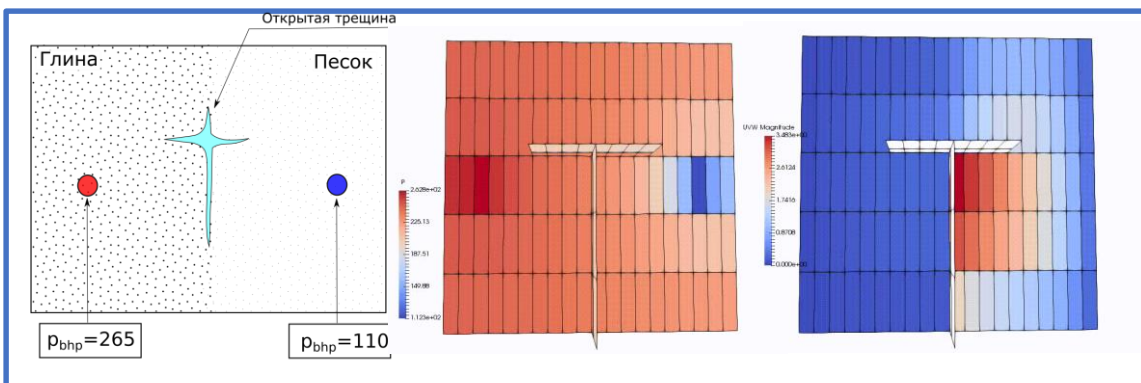
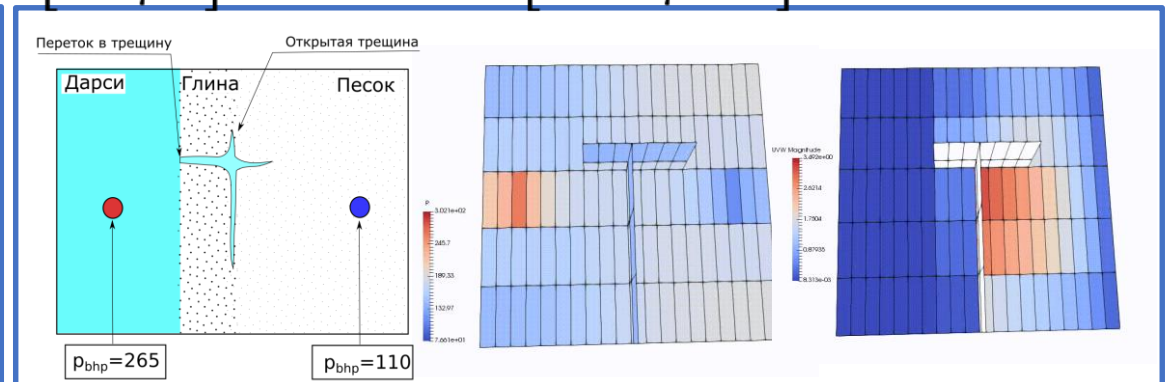
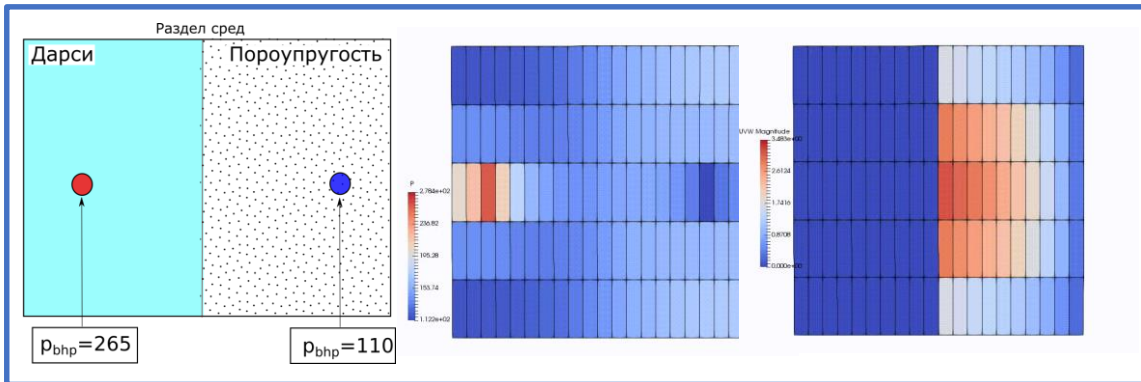
смещения без трещины



МКО между Дарси и пороупругостью

- Равенство потоков,

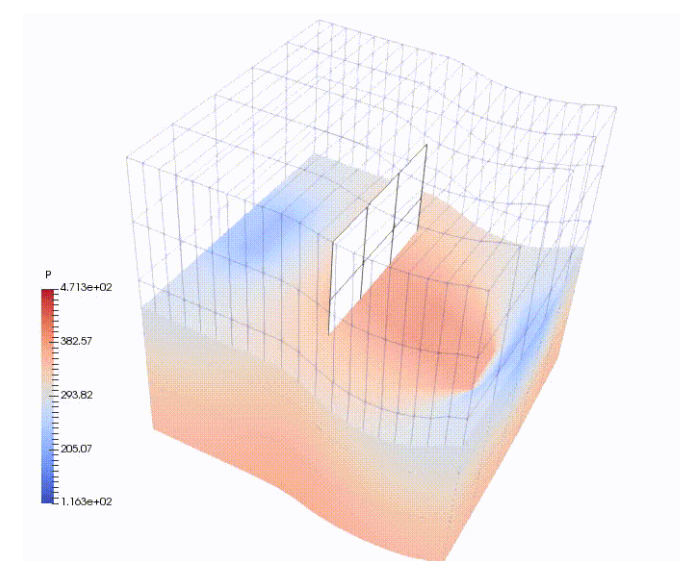
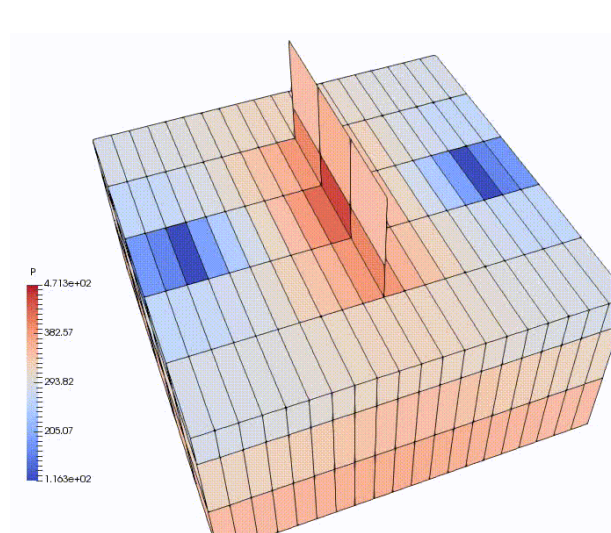
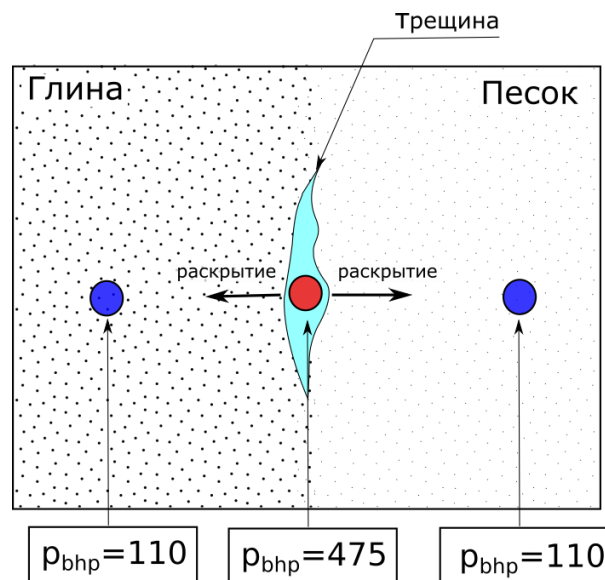
- Пороупругость:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{B}\mathbf{n})^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} - (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T) \begin{bmatrix} \mathbb{E} \\ \frac{1}{\mu} \mathbb{K} \end{bmatrix} (\mathbb{I} \otimes \nabla) \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_f g \mathbf{n}^T \frac{1}{\mu} \mathbb{K} \nabla z \\ -\frac{1}{\Delta t} (\mathbb{B}\mathbf{n})^T \mathbf{u}^n \end{bmatrix}$$
- Дарси:
$$\begin{bmatrix} \mathbf{t} \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} - (\mathbb{I} \otimes \mathbf{n}^T) \begin{bmatrix} \mathbb{E} \\ \frac{1}{\mu} \mathbb{K} \end{bmatrix} (\mathbb{I} \otimes \nabla) \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ p^{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho_f g \mathbf{n}^T \frac{1}{\mu} \mathbb{K} \nabla z \end{bmatrix}$$





Трещины с изменяемой апертурой

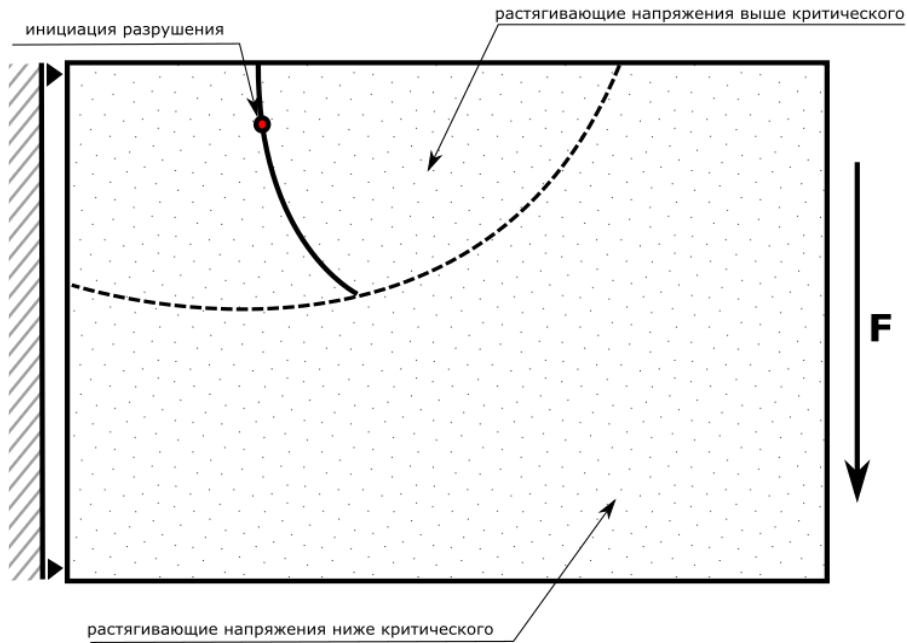
- Максимальная апертура раскрытия $\alpha > 0$ – дополнительная неизвестная.
- Раскрытие трещины определяется механическим смещением берегов трещины, при найденной апертуре смещение берегов относительно друг друга равно нулю.
- Дополнительная функция $0 \leq C(\alpha) \leq 1$ описывает площадь механического касания берегов трещины друг с другом при заданной апертуре.
 - При $C(\alpha) = 1$ трещина закрыта, выполняется условие скольжения, давление в трещине не задействовано.
 - При $C(\alpha) = 0$ трещина полностью раскрыта, выполняется условие контакта сред Дарси и пороупругости.



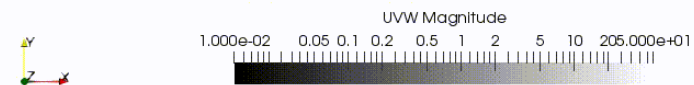
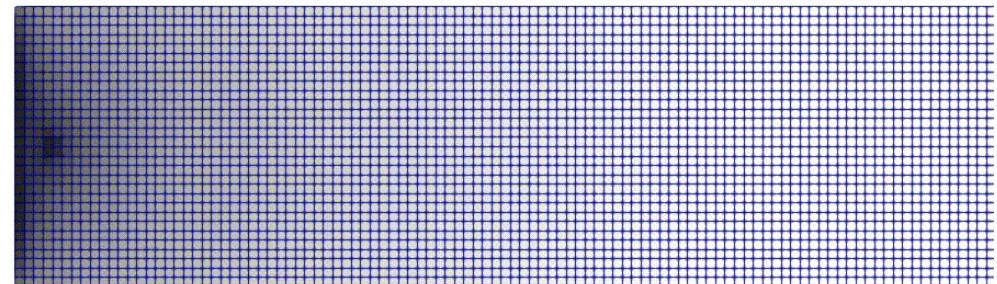
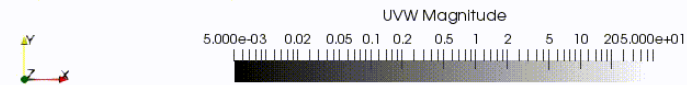
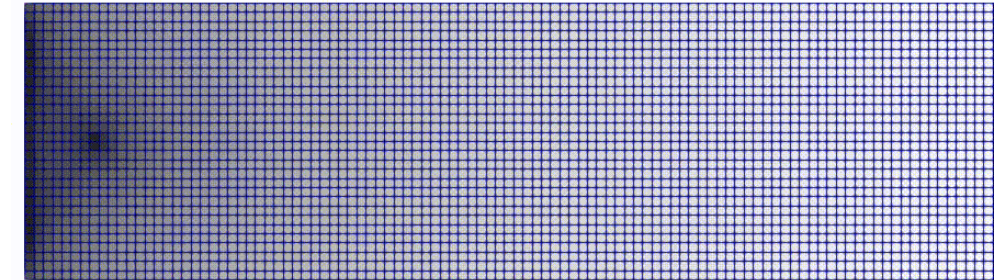
III. Параллельная модификация сеток



Механика разрушения

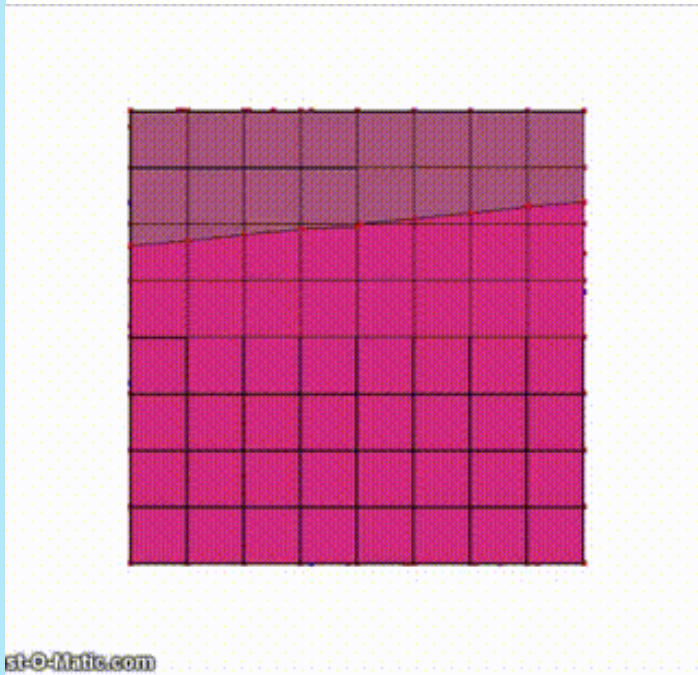


Нагрузка гетерогенного упругого бруска

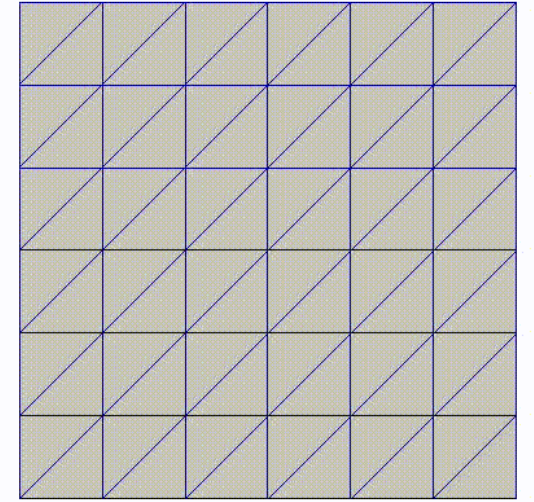
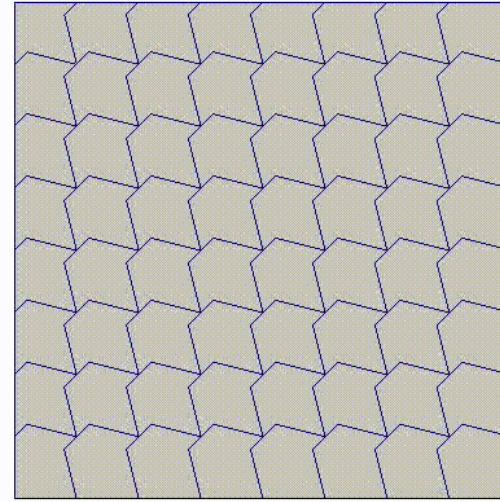
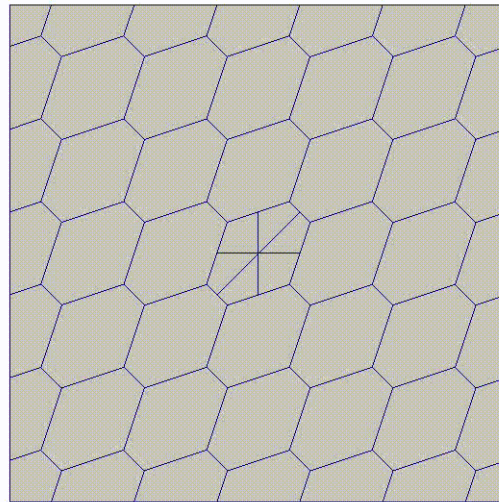




Динамическая адаптация сеток



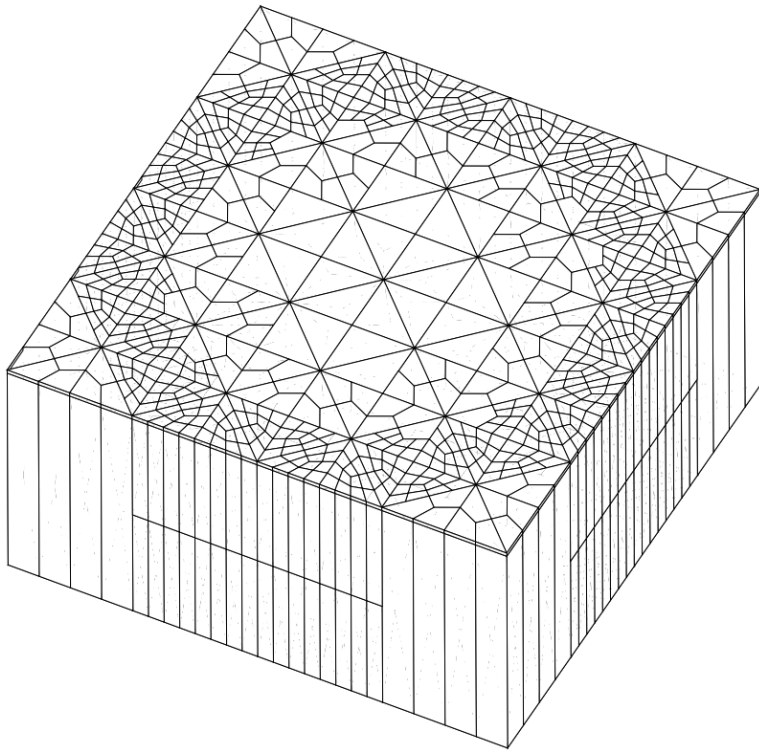
Пример INMOST: **OctreeCutcell**.



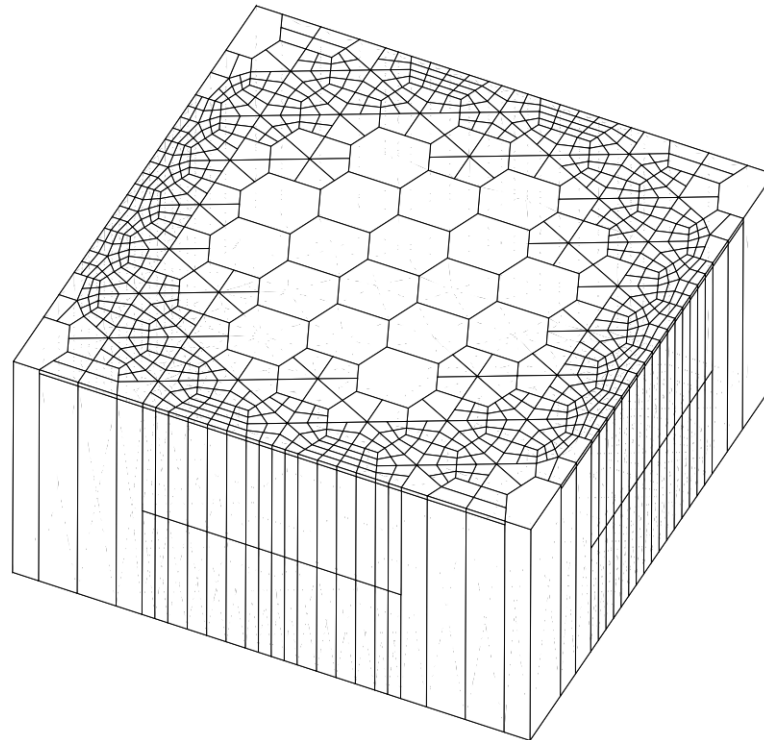
Под-библиотека INMOST: **AdaptiveMesh**



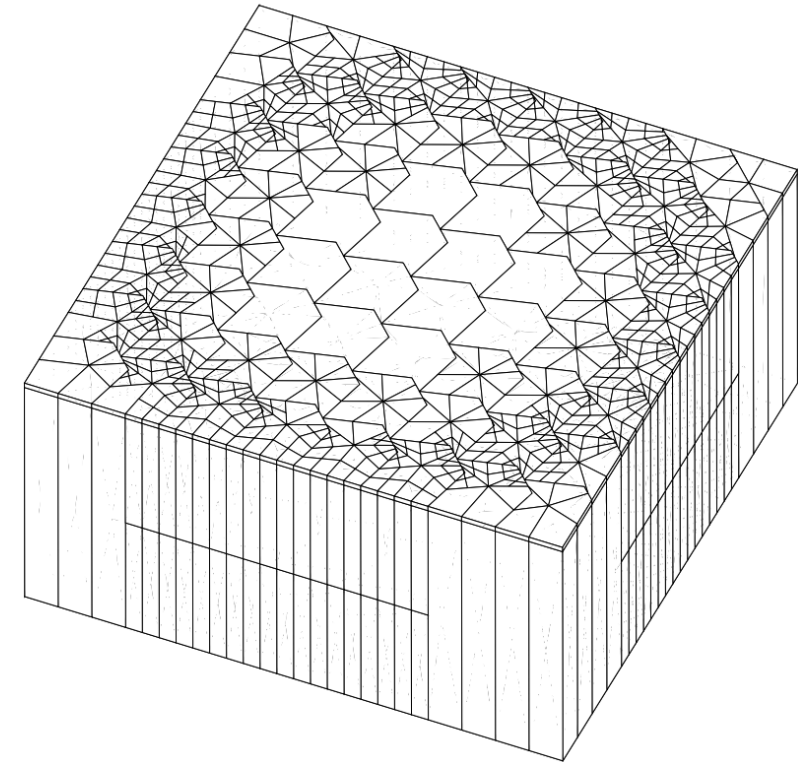
Динамическая адаптация сеток



Треугольно-призматическая



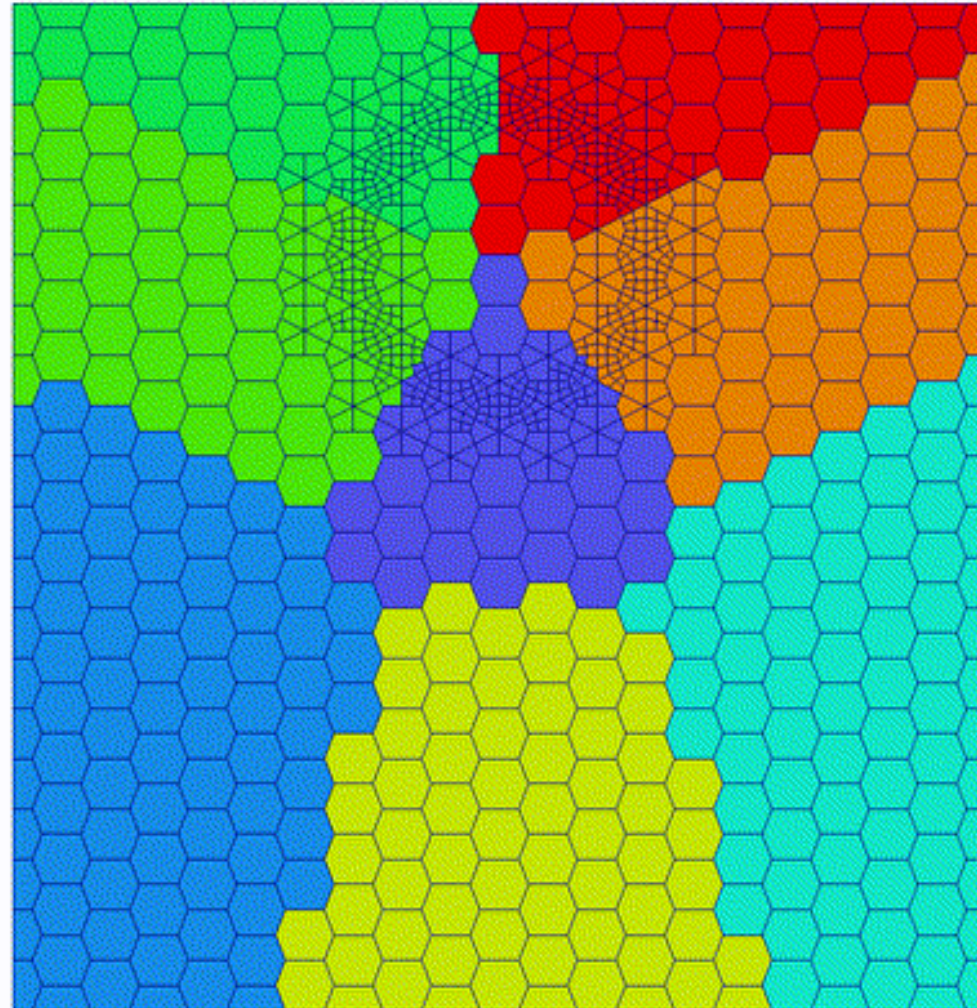
Гексаэдрально-призматическая



Невыпуклая



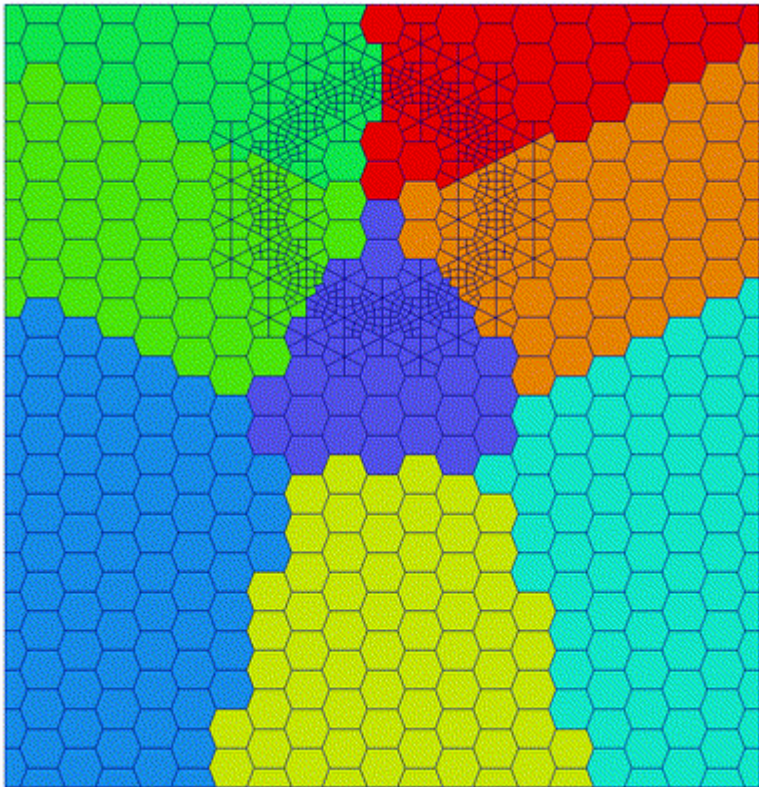
Параллельные динамические сетки



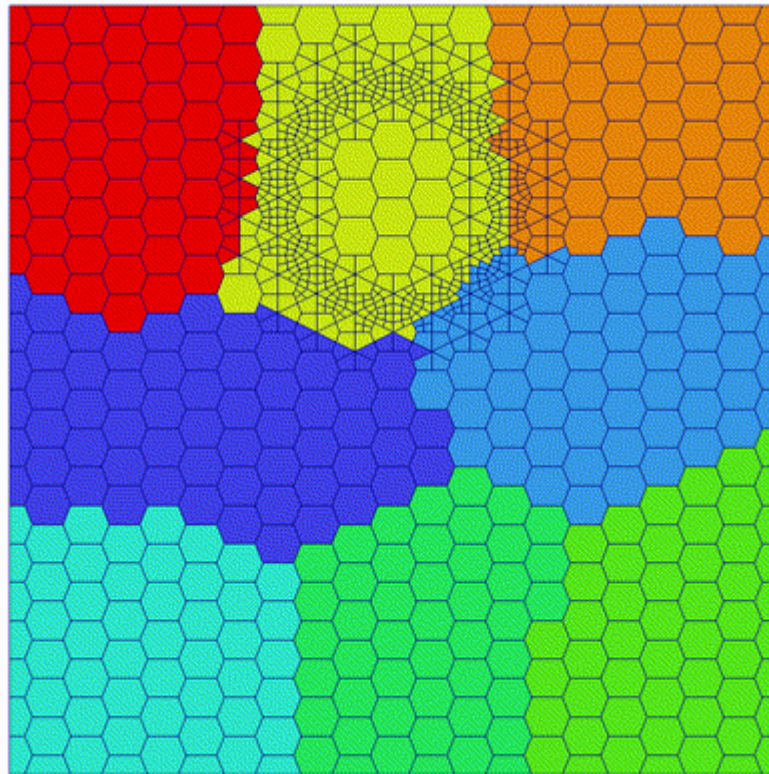
Результат



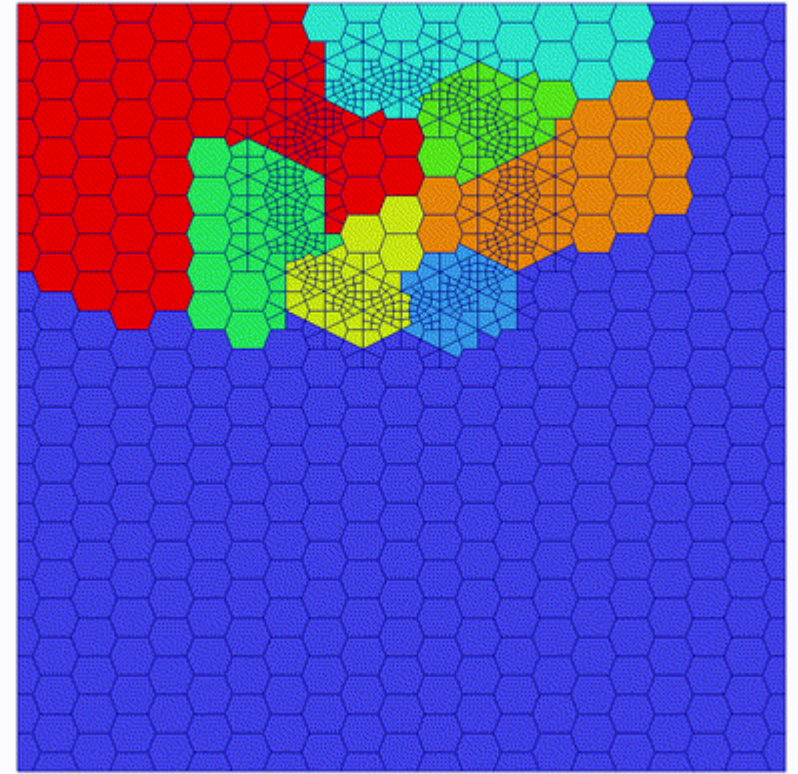
Балансировка



K-Means Clustering



ParMETIS_RefineKway



ParMETIS_AdaptiveRepart



Что изменилось?

В INMOST добавлен следующий функционал:

- Обмен данными типа ссылка на элемент.
- Добавлен функционал для работы с распределенными множествами элементов.
- Восстановление параллельной разметки после изменения сетки.
- Перераспределение разметки для минимизации работы по восстановлению слоев перекрытия.

Спасибо за внимание!

КОНТАКТЫ

- KIRILL.TERENOV@GMAIL.COM

ССЫЛКИ

- WWW.INMOST.ORG

