



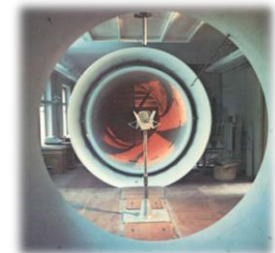
**POLYTECH**  
Peter the Great  
St. Petersburg Polytechnic  
University



## **РАЗВИТИЕ КОМПЛЕКСА ПРОГРАММ SINF/FLAG-S: ВЫХОД НА ТРЕХМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ВЯЗКО-НЕВЯЗКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ**

*Смирнов Е.М., Колесник Е.В., Смирновский А.А.*

Кафедра «Гидроаэродинамика, горения и теплообмен»



## Код SINF/Flag-S

- Flag-S: Fluids and gases – Simulations
- Оперирует с неструктурированными сетками
- Параллелизован с помощью MPI
- Разрабатывается с 2005 г. по настоящее время (общее число разработчиков – около 15)
- Развивается в том числе как исследовательский код для освоения современных и разработки новых методов и технологий
- Служит для проведения фундаментальных исследований в области динамики вязкой жидкости
- Используется также и для решения задач промышленной гидродинамики и теплообмена

## Классы задач, решаемых с использованием кода SINF/Flag-S и его ответвлений:

- Ламинарные и турбулентные течения жидкости
- Дозвуковые течения газа
- Теплообмен при вынужденной, свободной и смешанной конвекции в полях массовых сил (гравитационной, центробежной и силы Кориолиса)
- Задачи сопряженного теплообмена (без радиационного), включая процессы испарения и конденсации на границах раздела сред
- Задачи конвективно-диффузионного переноса примеси
- Течения со свободной поверхностью (метод Volume of Fluid)
- Течения в пористых средах

## Ответвления от SINF/Flag-S (специализированные коды):

- **Flag-FS** (течения со свободной поверхностью; 2009-2013)
- **ТЕМБР** (жидкие металлы; для ГК Росатом, 2012-2013)
- **СКАТ<sup>3</sup>** (сопряженный тепломассоперенос и др.; Роскосмос, 2014-2015)

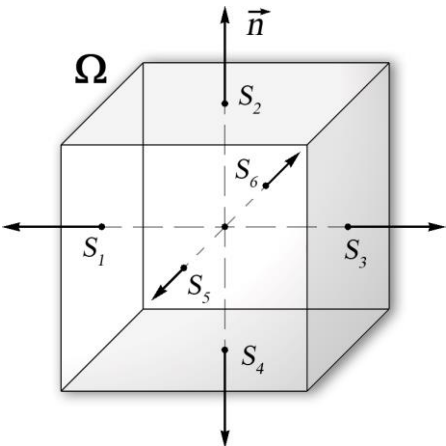
## В активной разработке:

- Модули для расчета сверх- и трансзвуковых течений однородного газа

Численный метод

Метод конечных объемов – интегральные формы уравнений баланса

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiint_S \rho \vec{V}_n dS &= 0 \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} dV + \oiint_S (\rho V_n \vec{V} - p \vec{n}) dS + \oiint_S (\underline{\tau} \cdot \vec{n}) dS &= 0 \\ \iiint_{\Omega} \frac{\partial (\rho E)}{\partial t} dV + \oiint_S \rho V_n H dS - \oiint_S (\underline{\tau} \cdot \vec{V}) \cdot \vec{n} dS + \oiint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS &= 0 \end{aligned}$$



Для расчета необходимо вычислить потоки на гранях:

конвективные

диффузионные

Требования к схемам аппроксимации конвективных потоков

- возможность точного разрешения газодинамических разрывов на небольшом числе внутренних точек
- отсутствии осцилляций поля течения в окрестности разрывов

вектор невязких потоков

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + p n_x \\ \rho v V_n + p n_y \\ \rho w V_n + p n_z \\ \rho H V_n \end{bmatrix}$$

# Схемы аппроксимации конвективных потоков

Схемы расщепления векторов потоков

● AUSM

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n \\ \rho v V_n \\ \rho w V_n \\ \rho H V_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ p n_x \\ p n_y \\ p n_z \\ 0 \end{bmatrix}$$

Отдельное расщепления для конвективной части потока и составляющей потока, связанной с давлением

$$M_{1/2} = M_L^+ + M_R^- \qquad p = p_L^+ + p_R^-$$

Схемы основанные на приближенном решении задачи Римана о распаде разрыва

● Схема Рун

$$\vec{F}_f = \langle \vec{F} \rangle - \vec{D}$$

$$\langle \vec{F} \rangle = 0.5(\vec{F}(\vec{w}_f^L) + \vec{F}(\vec{w}_f^R)) \quad \tilde{A} = (\partial \vec{F} / \partial \vec{w})$$

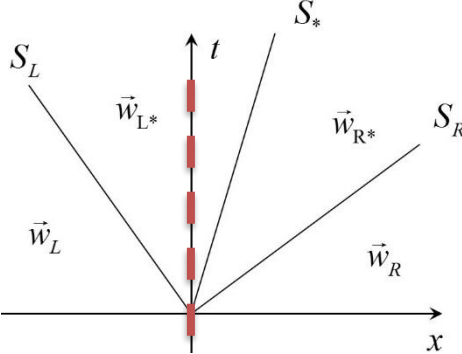
$$\vec{D} = \frac{1}{2} |\tilde{A}(\vec{w}_f^R, \vec{w}_f^L)| (\vec{w}_f^R - \vec{w}_f^L) \quad |\tilde{A}| = R |\tilde{\Lambda}| L$$

● HLL

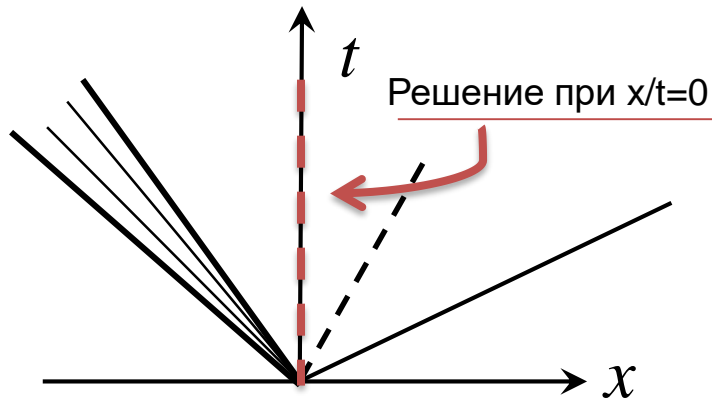
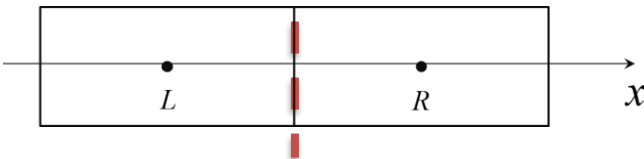
● HLLC

$$S_L = \min(u_L - c_L, \tilde{u} - \tilde{c})$$

$$S_R = \max(u_R + c_R, \tilde{u} + \tilde{c})$$

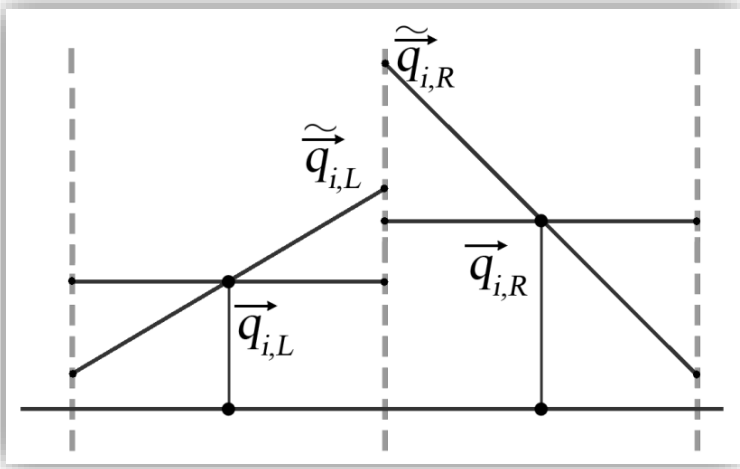


● Схема Годунова, основанная на точном решение задачи Римана о распаде разрыва



# Повышение порядка точности

Повышение порядка точности (MUSCL подход - Monotone Upstream-centred Schemes for Conservation Laws): кусочно-полиномиальное распределение переменных в ячейке.



$$\vec{q} = \begin{bmatrix} p \\ T \\ u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

$\tilde{\vec{q}}_{L,R}$  - реконструированные значения

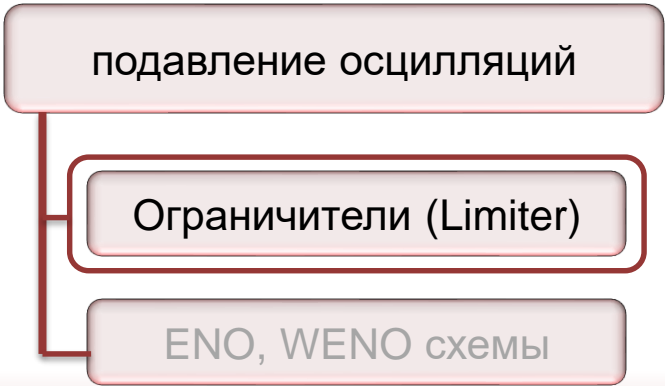
$$\tilde{\vec{w}} = \vec{w}(\tilde{\vec{q}})$$

Расчет вектора потоков

первый порядок точности

второй порядок точности

$$\vec{F}_f = \vec{F}_f(\vec{w}_L, \vec{w}_R) \quad \vec{F}_f = \vec{F}_f(\tilde{\vec{w}}_L, \tilde{\vec{w}}_R)$$

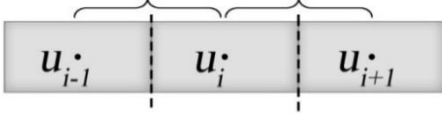


# Квазиодномерные ограничители

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Ограничители для структурированных сеток:

$$R_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i - u_{i-1}}$$



$$u_{i+1/2}^L = u_i + \frac{1}{2} \psi(R_i) (u_i - u_{i-1})$$

$$u_{i-1/2}^R = u_i - \frac{1}{2} \psi\left(\frac{1}{R_i}\right) (u_{i+1} - u_i)$$

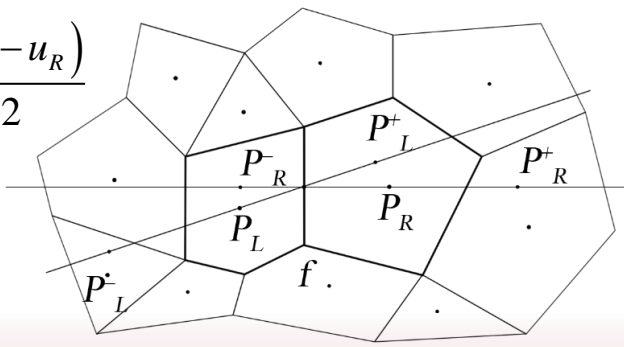
Обобщение на неструктурированные сетки:

$$\tilde{u}_L = u_L + \frac{1}{2} \psi(R_L) \frac{(u_L - u_L^-)}{2}$$

$$\tilde{u}_R = u_R - \frac{1}{2} \psi(R_R) \frac{(u_R^+ - u_R)}{2}$$

$$R_L = \frac{u_L^+ - u_L}{u_L - u_L^-}$$

$$R_R = \frac{u_R^- - u_R}{u_R - u_R^+}$$

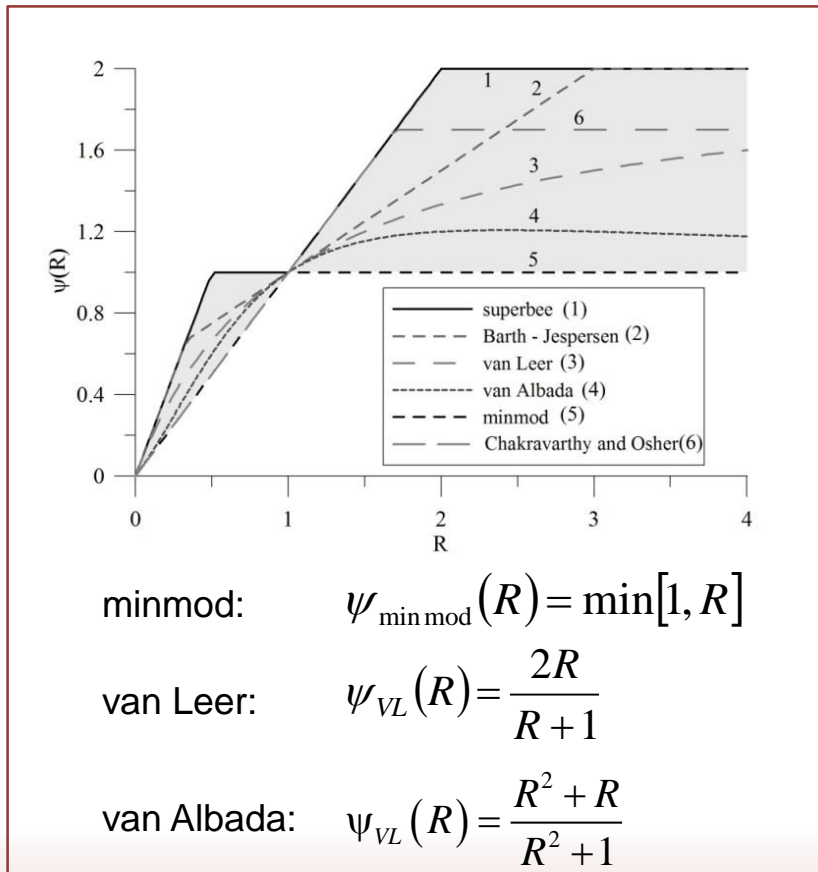


**TVD схема**

(Total Variation Diminishing)

TVD [Sweby, 1984]:

$$0 < \left( \frac{\psi(R)}{R}, \psi(R) \right) < 2 \quad \frac{\psi(R)}{R} = \psi\left(\frac{1}{R}\right)$$



## Способы восстановления точек

Необходимо восстановить дополнительные точки

Методы, использующие градиент

- метод DM (Darwish, Moukalled, 2003)

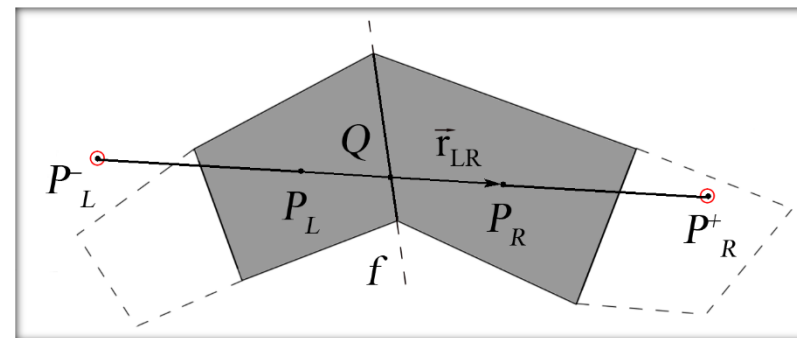
Darwish M., Moukalled F. TVD schemes for unstructured grids // Int. J. Heat Mass Transfer. 2003. Vol. 46. pp. 599-611

$$u_L^- = u_L - \left( 2(\nabla u)_L \vec{r}_{LR} - (u_R - u_L) \right)$$

$$u_L^+ = u_R$$

$$u_R^+ = u_R - \left( 2(\nabla u)_R \vec{r}_{LR} - (u_R - u_L) \right)$$

$$u_R^- = u_L$$



- ⇒ простота реализации
- ⇒ необходимо вычислять градиенты всех переменных

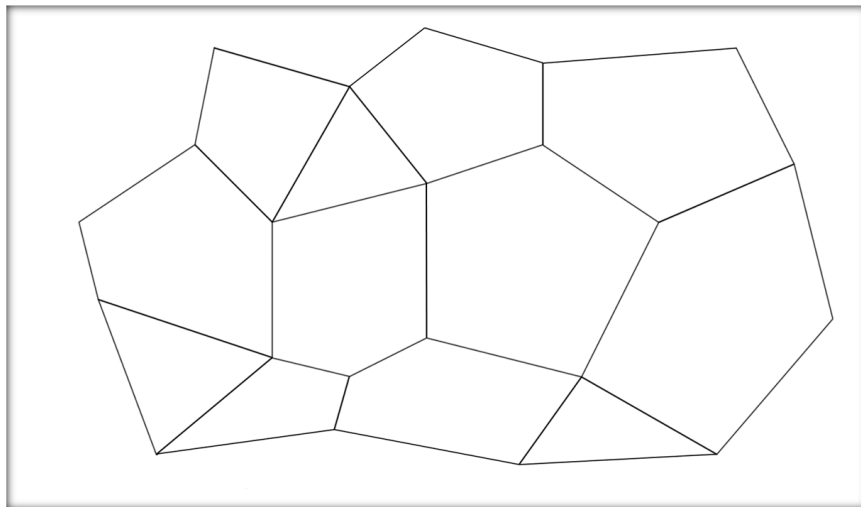


## Методы, не использующие градиент

### ● метод ВК (Bakhvalov, Kozubskaya, 2016)

C. le Touse, A. Murrone, and H. Guillard, Multislope MUSCL method for general unstructured meshes // J. Comput. Phys. 284, 389–418 (2015).

Бахвалов П.А., Козубская Т.К. Схема с квазиодномерной реконструкцией переменных, определенных в центрах элементов трехмерной неструктурированной сетки // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28. № 3. – С. 79–95.



- Для каждой грани проводится две прямые реконструкции
- Для дополнительных точек слева и справа определяется соответствующие тройки (пары) ячеек
- Значения в точках определяется путем интерполяции из центров ячеек

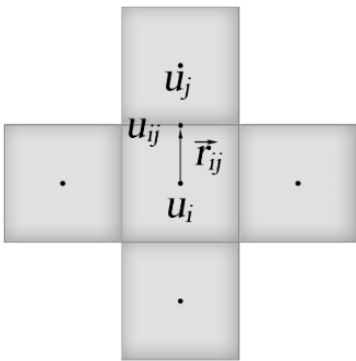
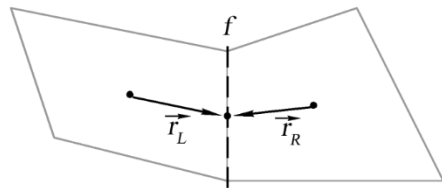
#### Алгоритм нахождения интерполирующих троек:

- определяется множество соседей первого уровня для текущей ячейки
- все ячейки сортируются по возрастанию косинуса угла между лучом реконструкции и выпущенным из центра текущей ячейки вектором направления на центр ячейки
- перебираются тройки ячеек в порядке возрастания суммы индексов ячеек в отсортированном массиве
- используется первая найденная интерполирующая тройка ячеек

# Скалярные ограничители

⇒ реконструкция по градиенту  
⇒ применение ограничителя  $\phi$ ,  
единого для ячейки

$$\tilde{u}_L = u_L + \phi_L \left( \nabla u \right)_L \cdot \vec{r}_L$$
$$\tilde{u}_R = u_R + \phi_R \left( \nabla u \right)_R \cdot \vec{r}_R$$



Ограничитель BJ (Barth-Jespersen,1989)

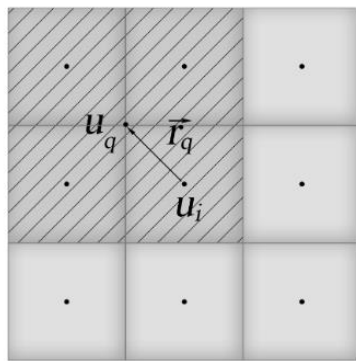
$$\delta u_i^{\min} = \min_j (u_j - u_i)$$
$$\delta u_i^{\max} = \max_j (u_j - u_i)$$

$$u_{ij} = u_i + (\nabla u)_i \cdot \vec{r}_{ij}$$
$$\Delta_- = (\nabla u)_i \cdot \vec{r}_{ij}$$

$$\begin{cases} \Delta_+ = \delta u_i^{\max}, \Delta_- > 0 \\ \Delta_+ = \delta u_i^{\min}, \Delta_- < 0 \end{cases}$$

$$\phi_{ij} = \Phi(y) \longrightarrow$$
$$\phi_i = \min(\phi_{ij})$$

Barth T.J., Jespersen D.C. The design and application of upwind schemes on unstructured meshes // AIAA Paper No. 89-0366. 1989.



MLP-ограничители (Park, Yoon et. al 2010)

$$\hat{u}_q^{\min} \quad \hat{u}_q^{\max}$$

$$\Delta_- = (\nabla u)_i \cdot \vec{r}_q$$

$$\begin{cases} \Delta_+ = \hat{u}_q^{\max} - u_i, \Delta_- > 0 \\ \Delta_+ = \hat{u}_q^{\min} - u_i, \Delta_- < 0 \end{cases}$$

$$\phi_q = \Phi(y) \longrightarrow$$
$$\phi_{i,MLP} = \min(\phi_q)$$

Park J.S., Yoon S.H., Kim C. Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids // J. Comput. Phys. 2010. Vol. 229. pp. 788-812.

Функция  $\Phi(y)$

$$y = \Delta_+ / \Delta_-$$
$$\Phi(y) = \min(1, y)$$

или

Дифференцируемый ограничитель:

$$\Phi(y) = \frac{y^2 + 2y}{y^2 + y + 2} \quad \phi = \frac{1}{\Delta_-} \left[ \frac{(\Delta_+^2 + \varepsilon^2) \Delta_- + 2\Delta_-^2 \Delta_+}{\Delta_+^2 + 2\Delta_-^2 + \Delta_+ \Delta_- + \varepsilon^2} \right]$$

порог  $\varepsilon = K(u_{\max} - u_{\min})$

## Программная реализация

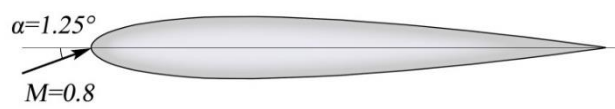
- Создана ветвь кода для расчета сжимаемых течений
- Реализованы различные схемы для расчета конвективных потоков (AUSM, Roe, HLL, HLLC, схема Годунова) второго порядка точности
- Реализованы квазиодномерные ограничители с различными способами восстановления точек: методы **DM** и **BK** и скалярные ограничители **BJ**, **VK**, **MLP-u<sub>1</sub>**, **MLP-u<sub>2</sub>**.
- Реализована эффективная неявная схема (в приращениях), в которой дискретизация стабилизирующего оператора по мере возможности согласована с расчётом невязок балансовых соотношений
- Код распараллелен с использованием MPI для возможности расчёта на многопроцессорных кластерных системах

Результаты расчетов были получены с использованием вычислительных ресурсов суперкомпьютерного центра Санкт-Петербургского политехнического университета Петра Великого ([www.scc.spbstu.ru](http://www.scc.spbstu.ru)).

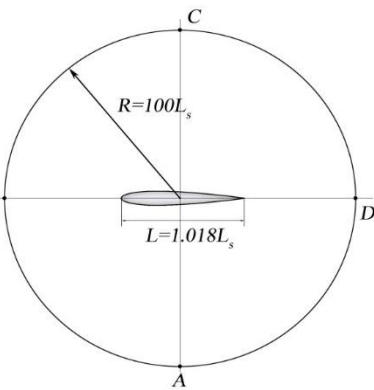
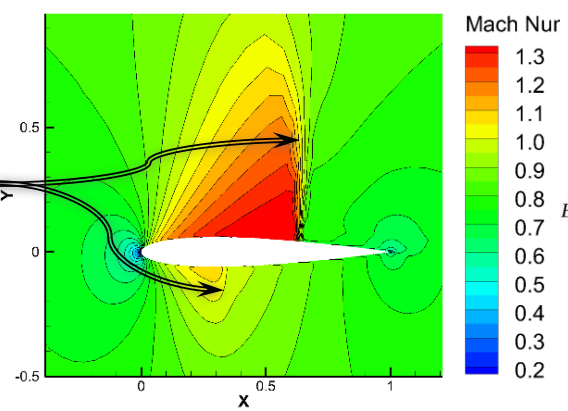


Тестовые задачи

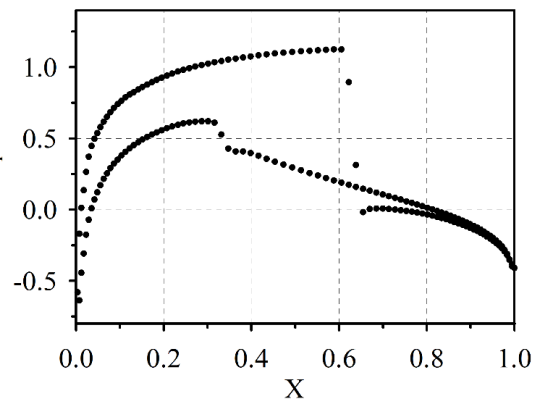
Невязкое двумерное обтекание  
крылового профиля **NACA-0012**



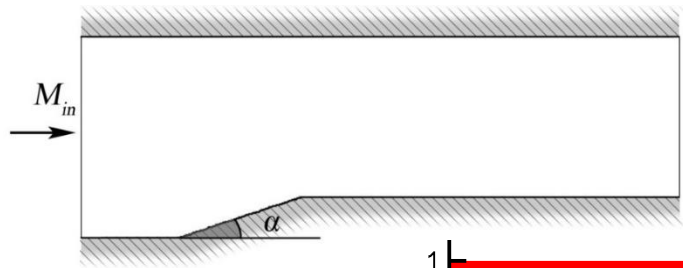
реализуется режим течения, при котором на верхней стороне профиля «садится» относительно сильный скачок уплотнения, а на нижней – слабый



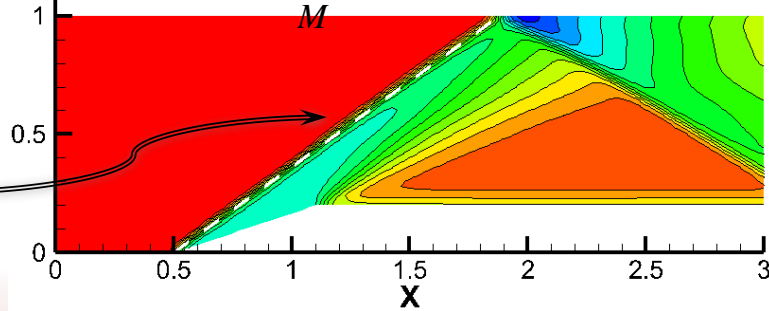
Распределение коэффициента давления вдоль профиля



Сверхзвуковое течение в канале с центральным клином

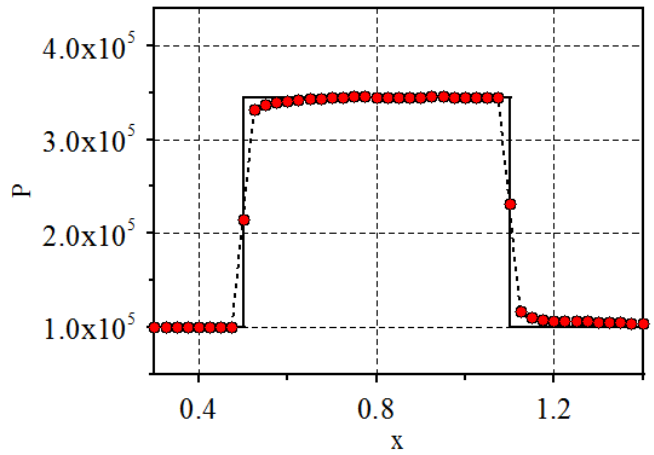


$M_{in} = 3.0$   
 $tg(\alpha) = 1/3$

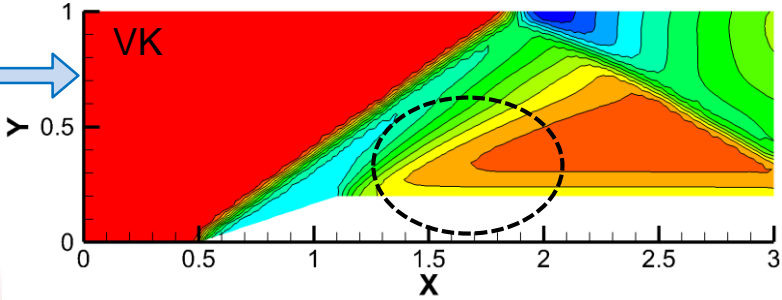
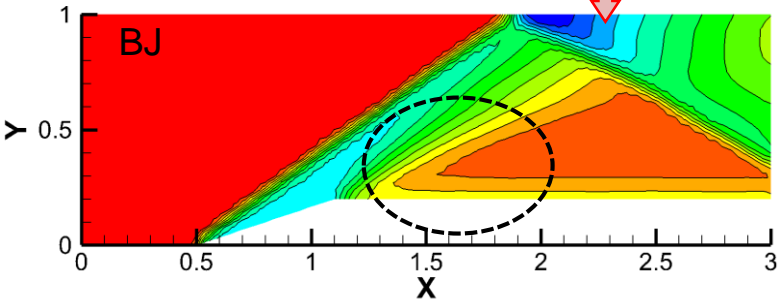
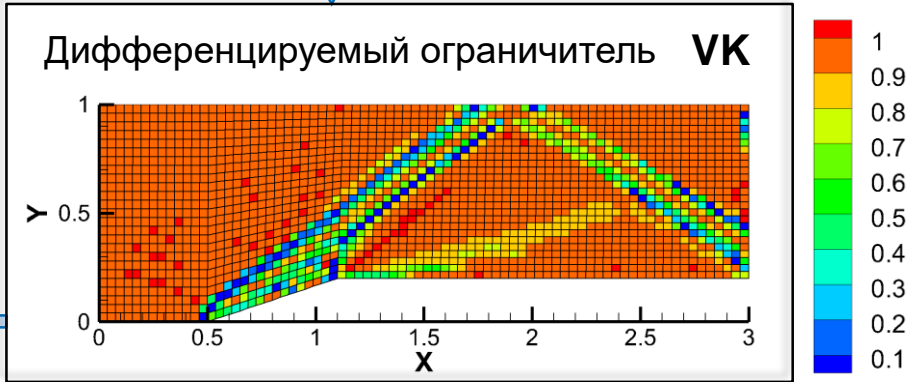
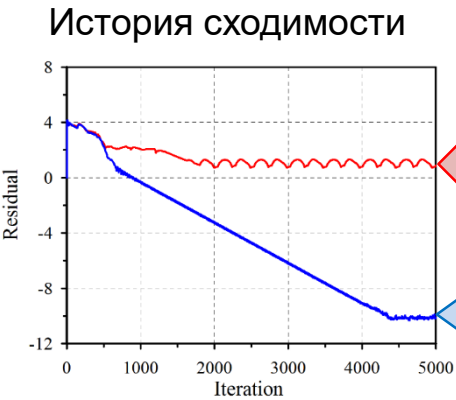
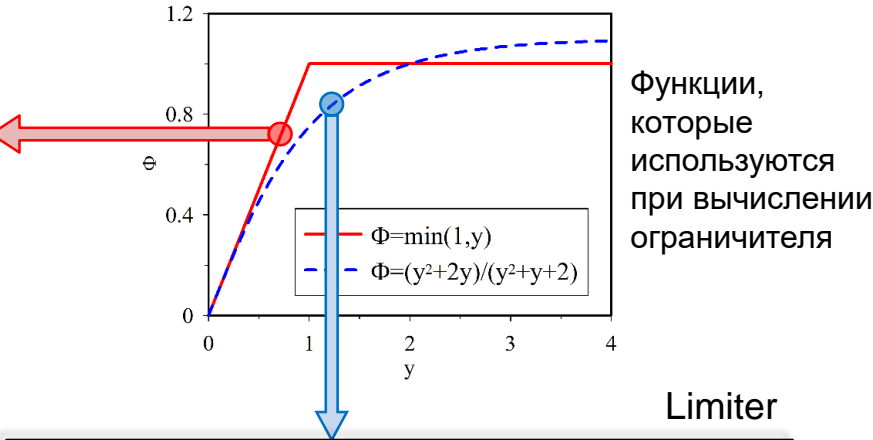
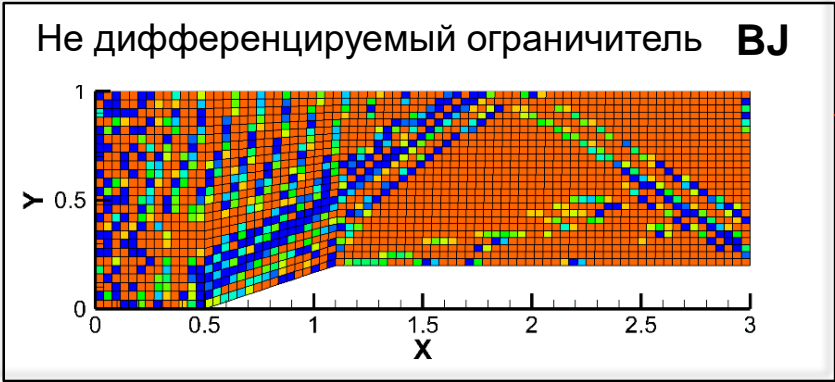


аналитическое решение

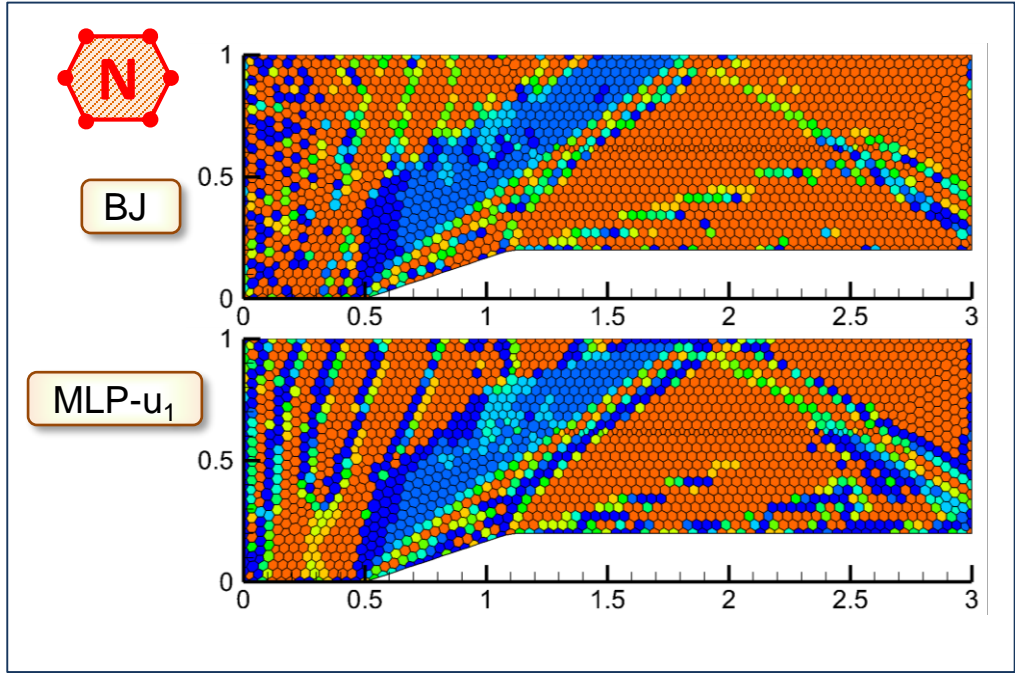
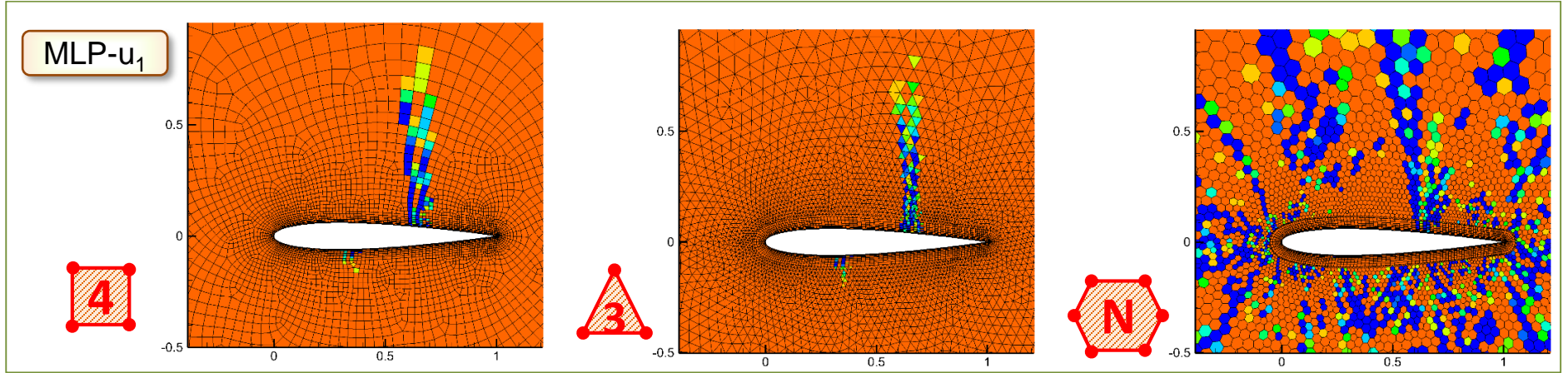
Распределение давления вдоль нижней стенки



Сходимость

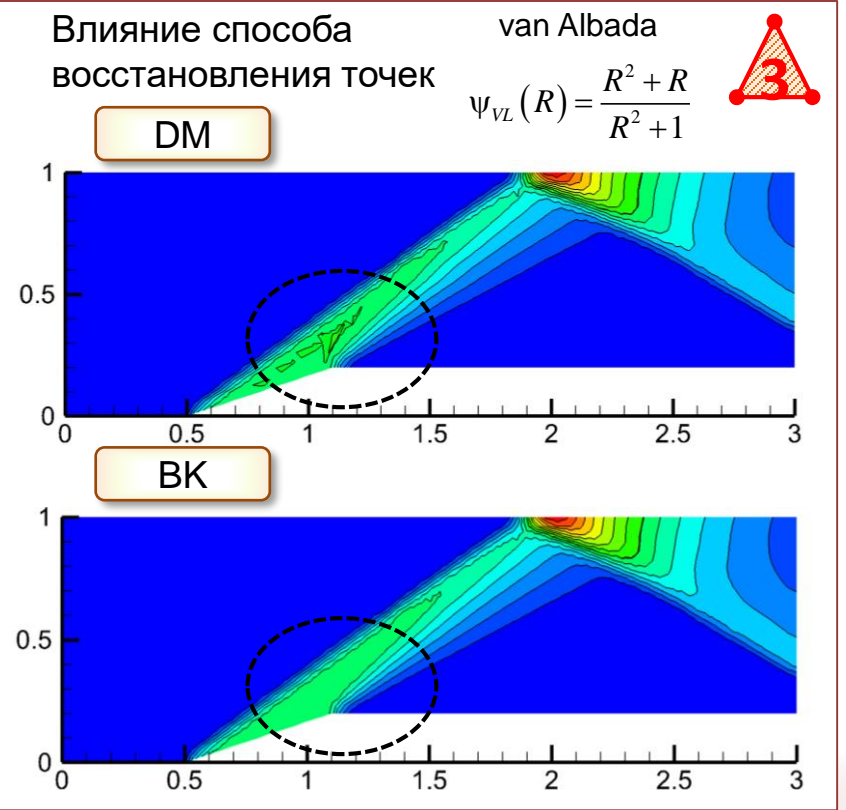


Влияние типа сеточных элементов



Наиболее гладкое решение

BK MLP

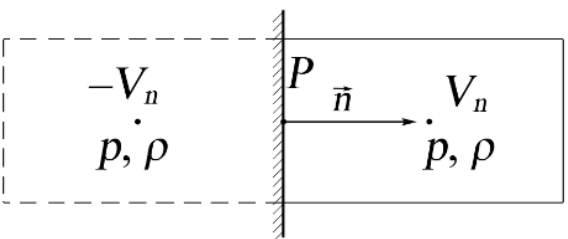




# Особенности реализации граничных условий

Расчет давления на стенке при расчете конвективных потоков на граничных гранях

- Экстраполяция давления  $P = p$
- Распад разрыва, первый порядок точности



Упрощенное решение задачи о распаде разрыва

Волна разрежения  $V_n > 0$

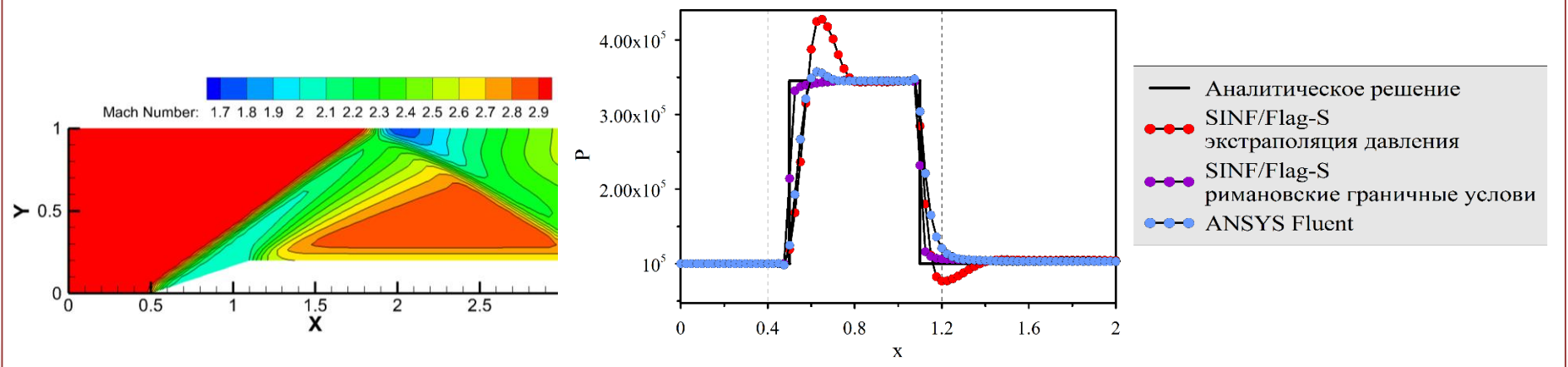
$$P = p \left( 1 - \frac{k-1}{2} \frac{V_n}{c} \right)^{\frac{2k}{k-1}}$$

Две ударные волны  $V_n < 0$

$$\frac{P}{\sqrt{\rho \left( \frac{k+1}{2} P + \frac{k-1}{2} p \right)}} = -V_n$$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \rho V_n \\ \rho u V_n + p n_x \\ \rho v V_n + p n_y \\ \rho w V_n + p n_z \\ \rho H V_n \end{bmatrix}$$

## Распределение давления вдоль нижней поверхности клина

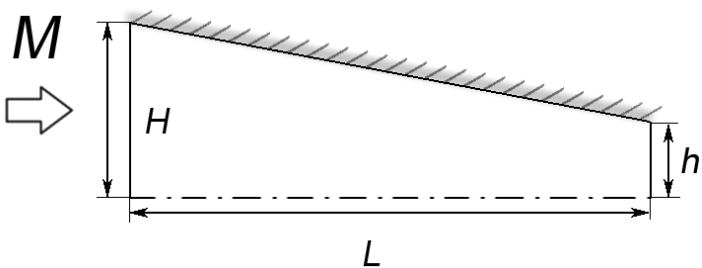


Учет вязких эффектов

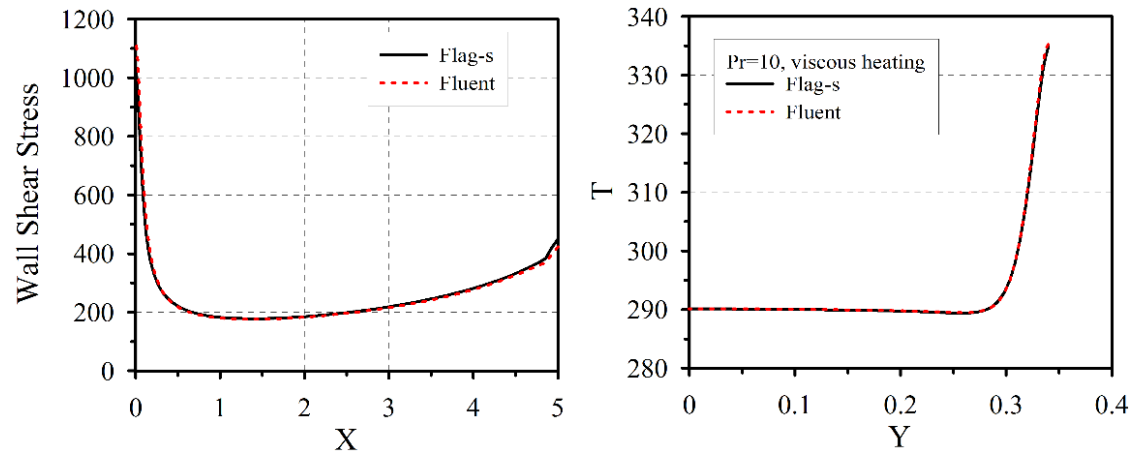
Течение в конфузоре

$M_{in} = 0.3$

$Re_H = 720$



Сравнение с ANSYS Fluent:

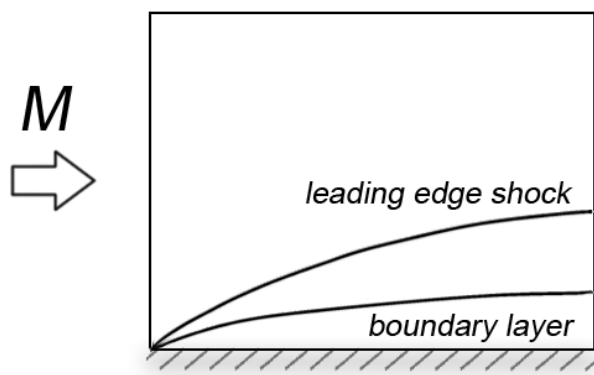


Сверхзвуковой пограничный слой на пластине

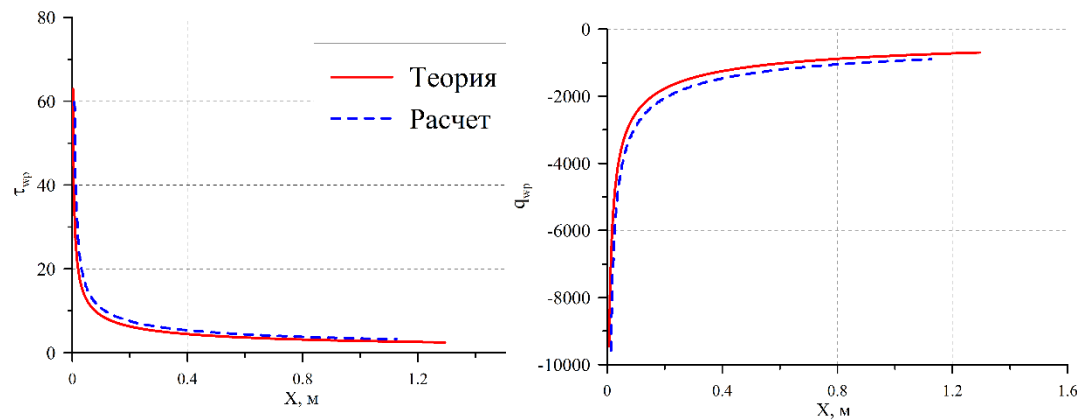
$M_{in} \approx 6.7$

$Re = 5 \cdot 10^6 [1 / M]$

$T_w = 300$

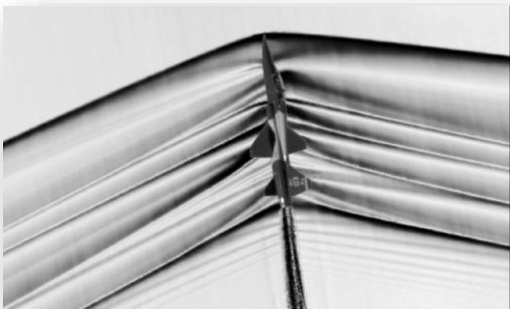
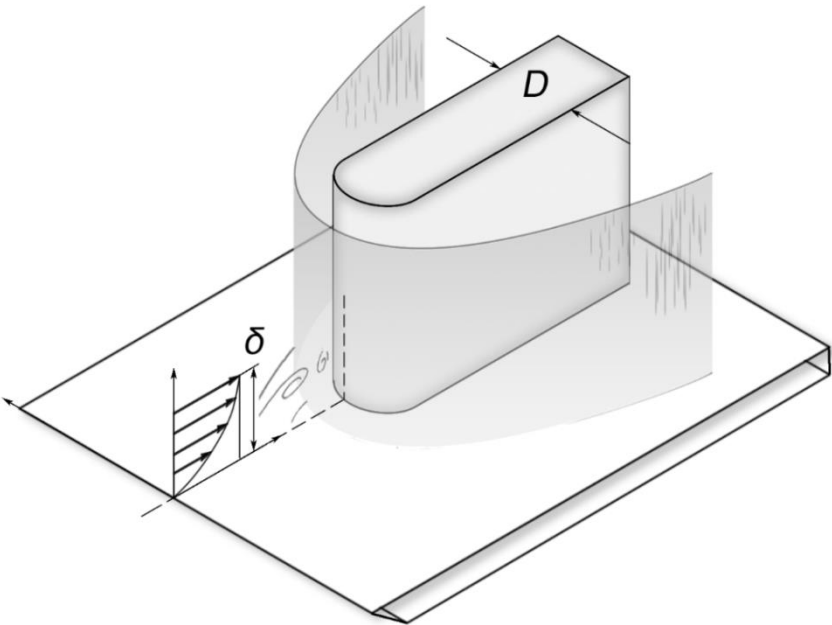


Сравнение с теорией:





# Сверхзвуковое обтекание удлиненного затупленного тела



Задачи  
высокоскоростных  
летательных  
аппаратов



D. S. Dolling and S. M. Bogdonoff, 1982, Blunt Fin-Induced Shock Wave/Turbulent Boundary-Layer Interaction

C.-M. Hung and P. G. Buning, 1985, Simulation of blunt-fin-induced shock-wave and turbulent boundary-layer interaction

A.F.P. Houwing et al., 2000, Laminar boundary layer separation at a fin-body junction in a hypersonic flow

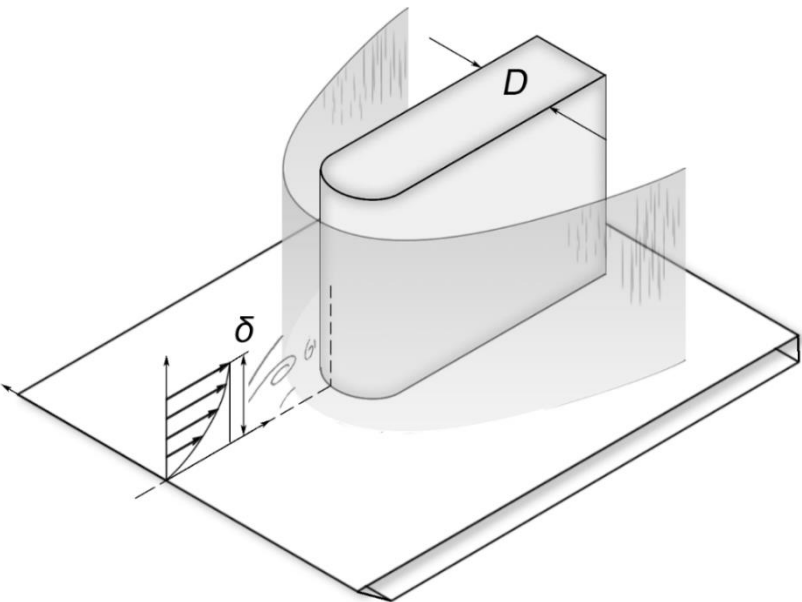
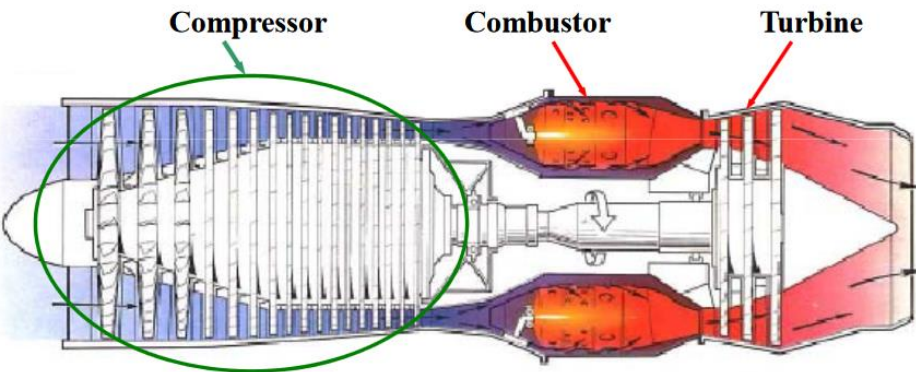
O. R. Tutty, G. T. Roberts and P. H. Schuricht, 2013, High-speed laminar flow past a fin-body junction

Volf Borovoy et al., 2017, The shock-waves interference in the flow around a cylinder mounted on a blunted plate

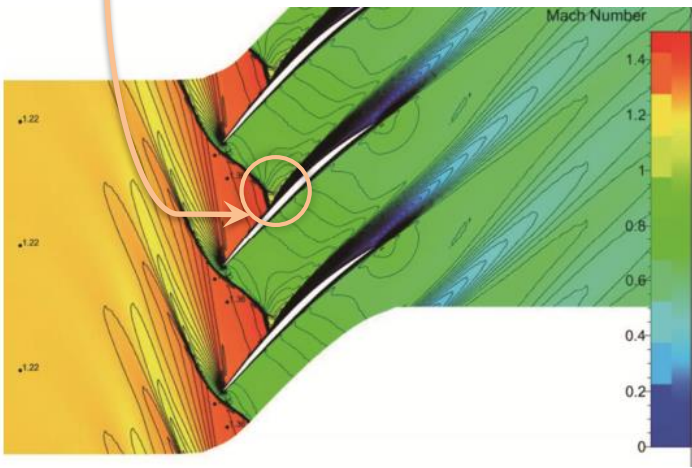


# Задачи турбомашиностроения

Решетка осевых компрессоров со сверхзвуковым входом:



падение ударной волны на соседнюю лопатку и возникновение отрывного пузыря



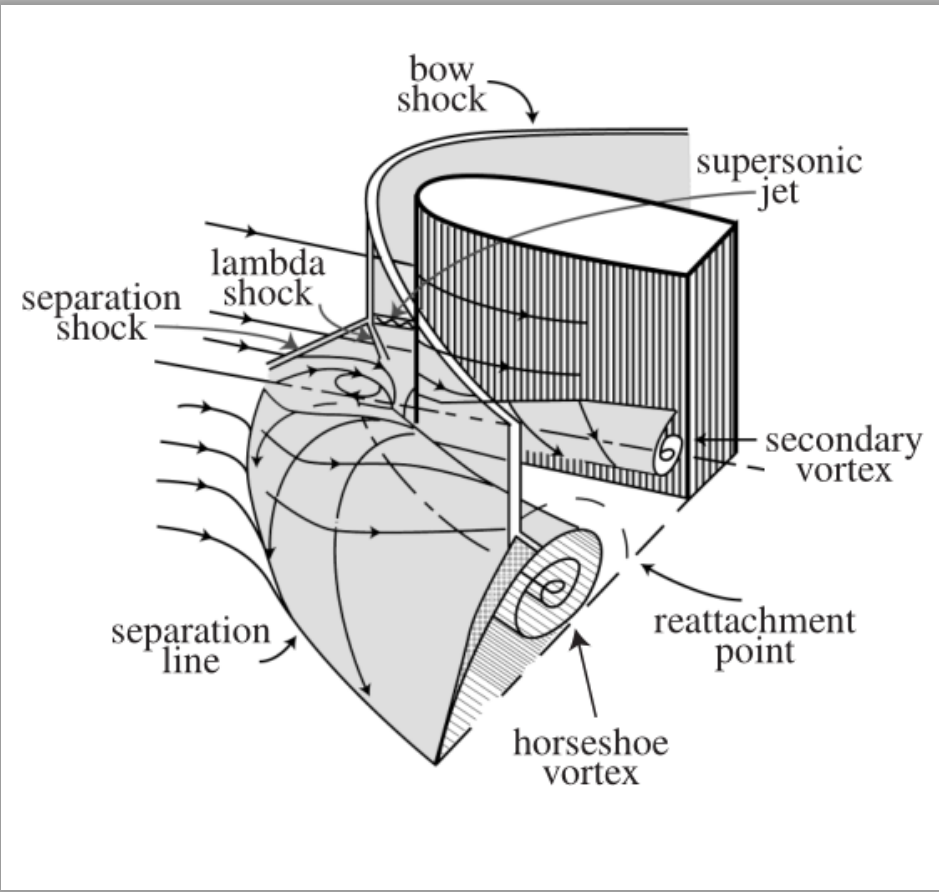
Flaszynski P., Doerffer P., 2015, Shock Wave Boundary Layer Interaction on Suction Side of Compressor Profile in Single Passage Test Section

Задача об обтекании передней части модельной турбинной лопатки

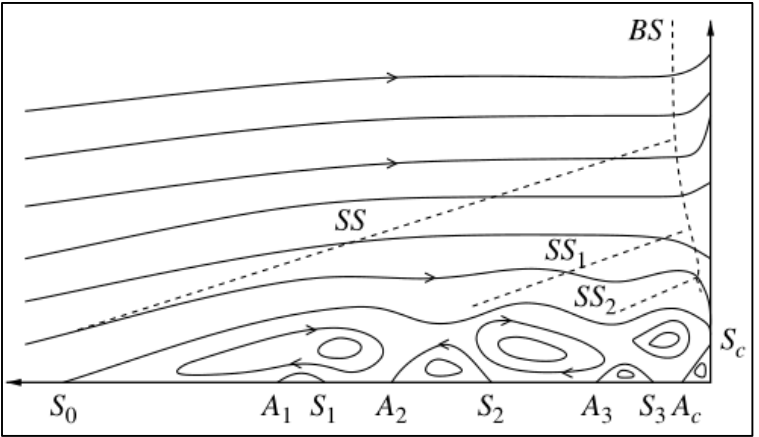
Определяющие параметры:

$M, Re_D, D/\delta$

Структура течения:



Линии тока в плоскости симметрии :



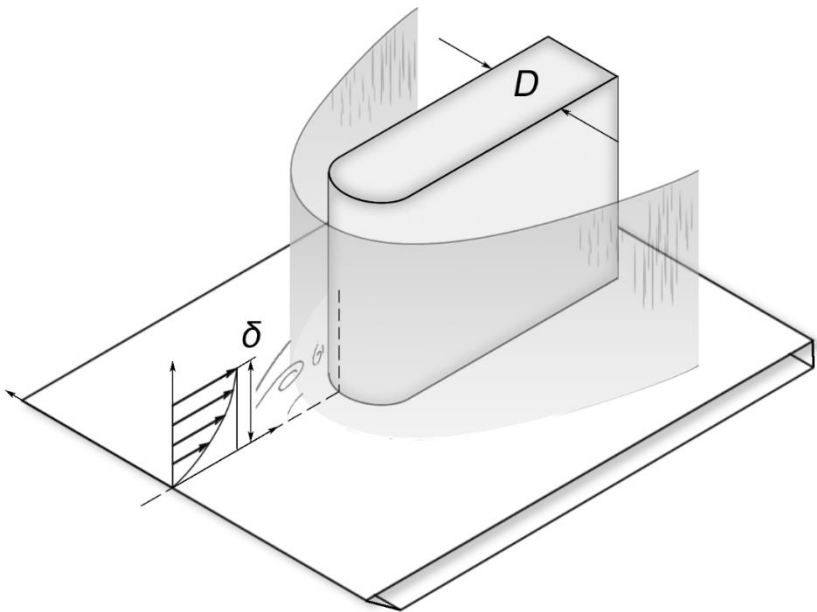
Численное моделирование:

- Взаимодействие ударных волн с пограничным слоем
- Взаимодействие ударных волн между собой
- Образование сложной вихревой структуры течения, включая подковообразные вихри
- Наличие областей с разными масштабами скорости

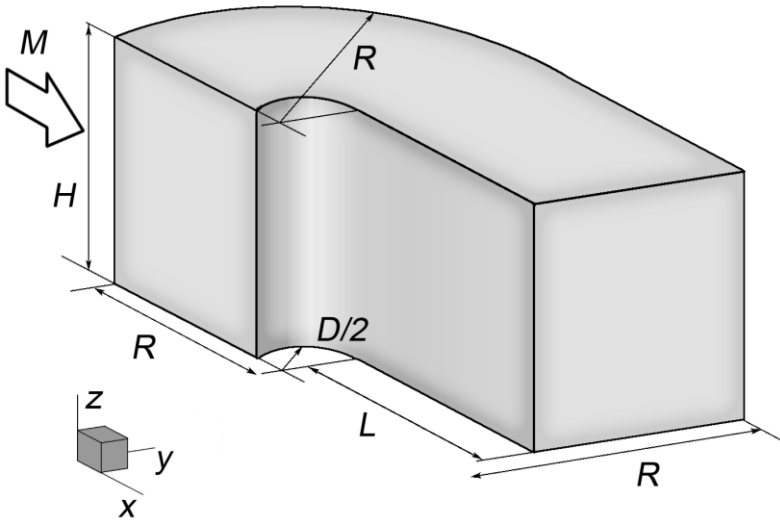
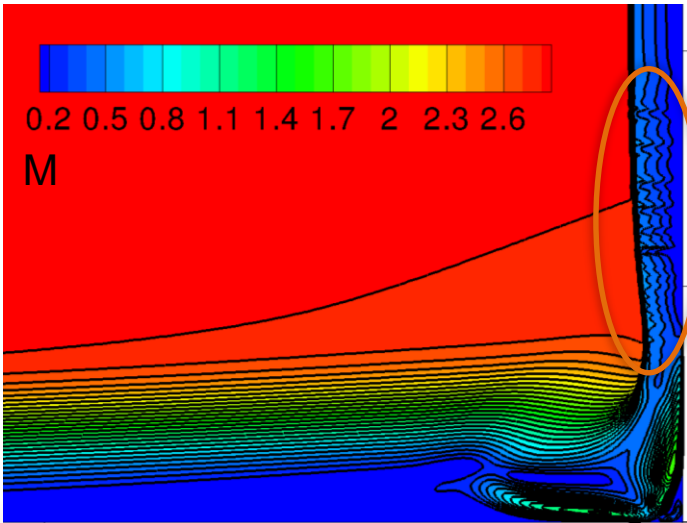
Постановка задачи

Определяющие параметры:  
 $M=2.95$ ,  $Re_D=4 \cdot 10^3$ ,  $D/\delta=1$

Размеры расчетной области:  
 $R=15D$ ,  $H=10D$ ,  $L=8D$



Поле числа Маха в плоскости симметрии



расчет по схеме Роу первого порядка точности  
(аналогично для схемы HLLC, схемы Годунова)

неустойчивость около  
отошедшей ударной волны!

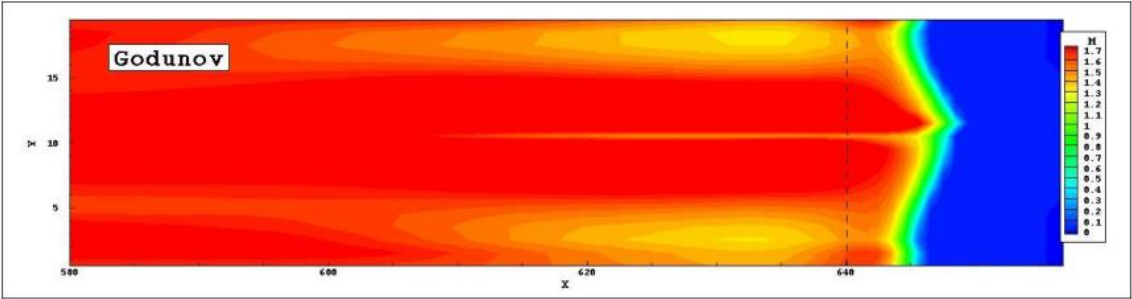
# Эффект «карбункула»

B. van Leer.

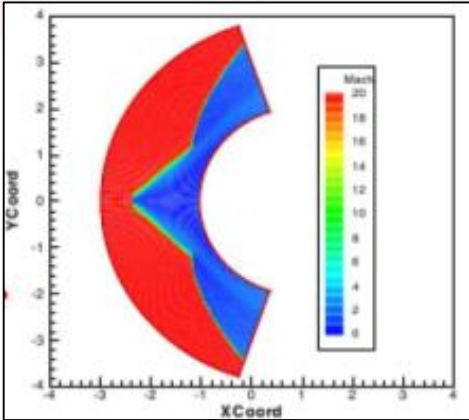
*“...greatest unresolved problem of classical finite-volume schemes...”*

«Карбункул»-явление – численная неустойчивость, возникающая при сквозном расчете сильных УВ в гиперзвуковых потоках; приводит к сильному искажению поля течения.  
Наиболее ярко карбункул-неустойчивость наблюдается, когда фронт ударной волны совпадает с сеточной линией (поверхностью) или немного отклонен от нее.

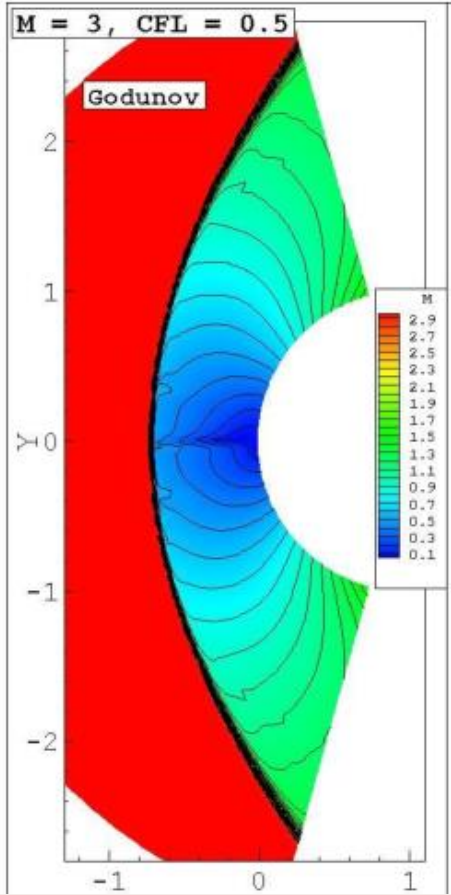
$M = 6$



$M = 10$



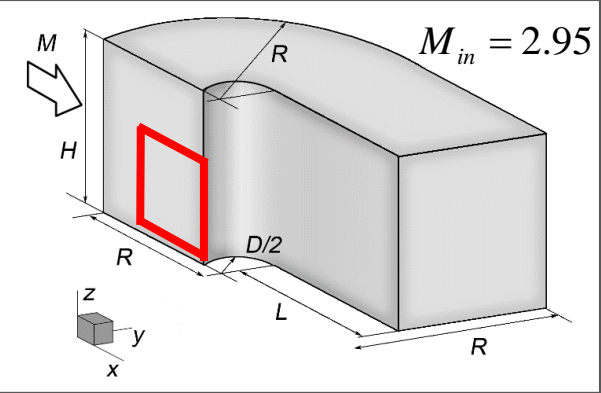
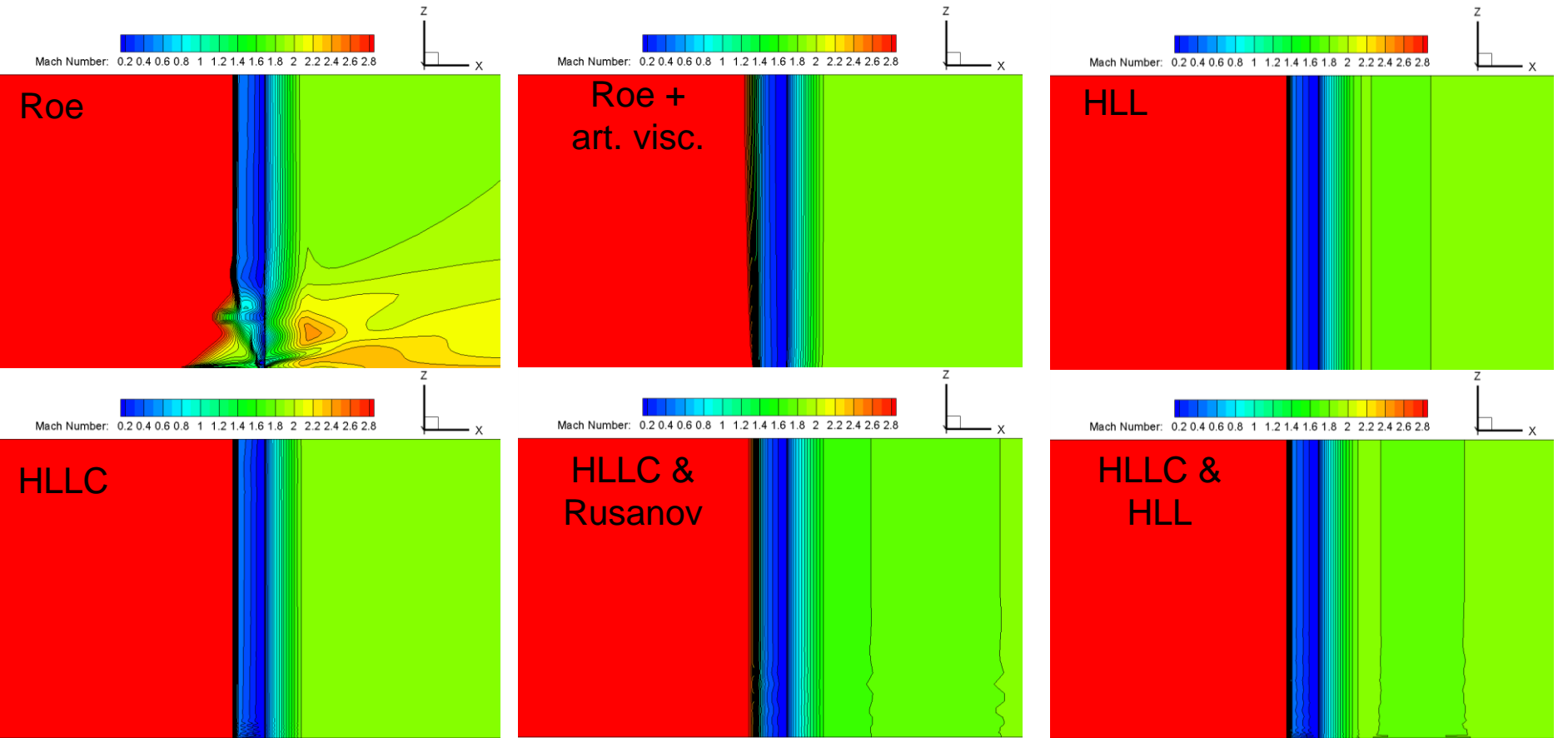
$M = 3$



И. Ю. Тагирова, А. В. Родионов, Применение искусственной вязкости для борьбы с «карбункул»-неустойчивостью в схемах типа Годунова, Матем. моделирование, 2015, том 27, номер 10, 47–64



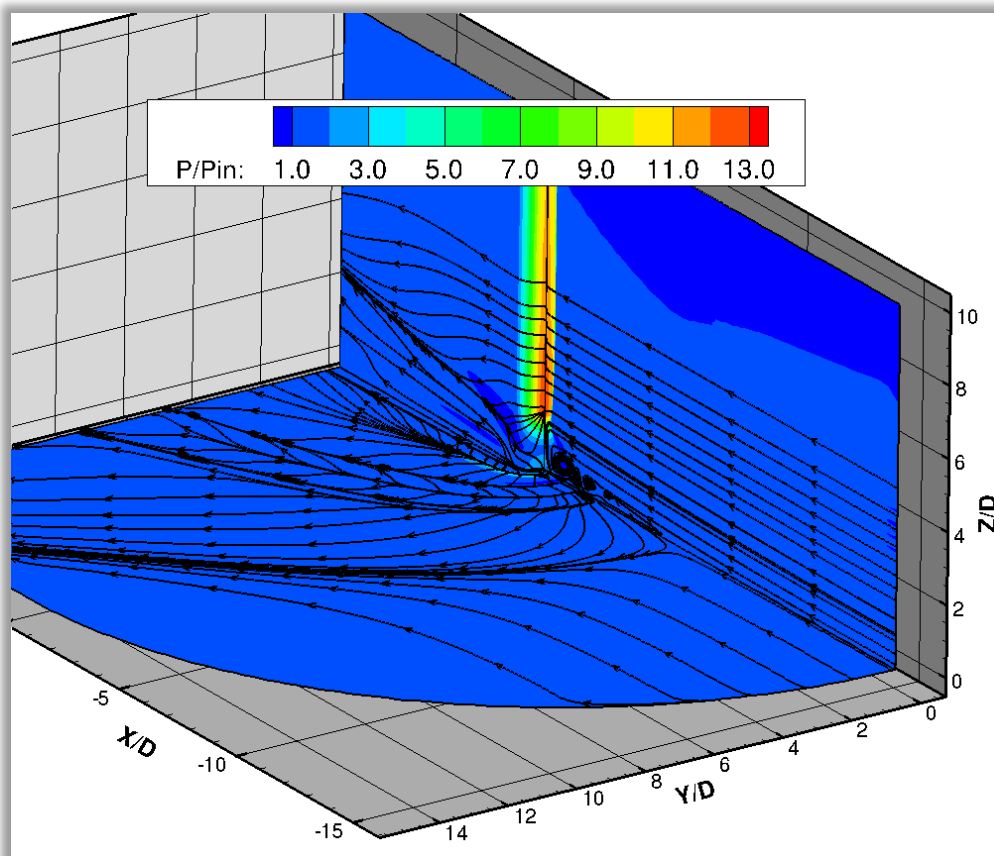
Задача об обтекания затупленного тела в невязкой постановке



Гибридная схема 
$$F_h = \alpha^2 F_R + (1 - \alpha^2) F_{HLLC}$$
 
$$\alpha = \frac{\Delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{|\Delta \mathbf{v}|}$$

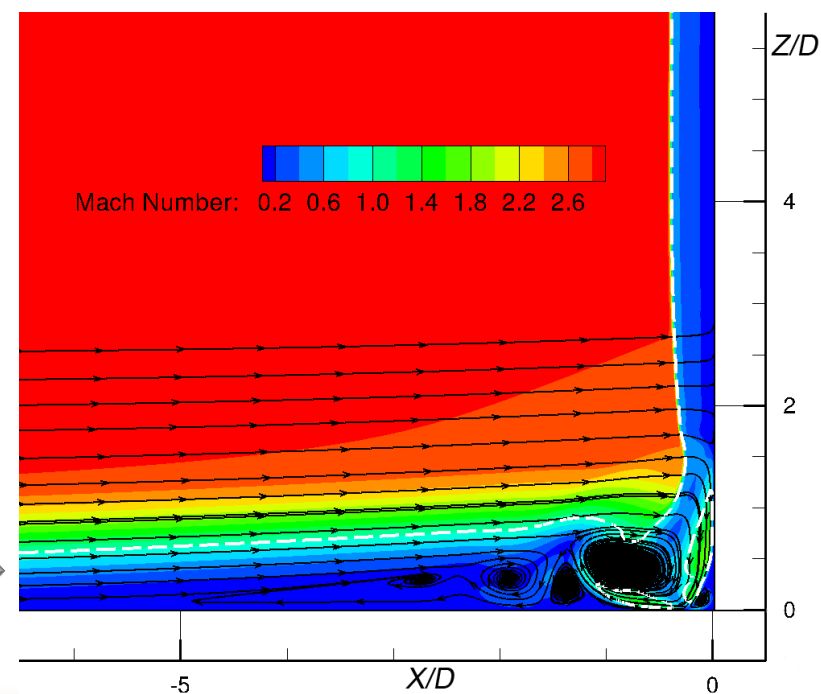
O. R. Tutty, G. T. Roberts and P. H. Schuricht, 2013,  
High-speed laminar flow past a fin-body junction

# Сверхзвуковое обтекание удлиненного затупленного тела



Поле давления и линии тока

Поле числа Маха и линии тока в плоскости симметрии



Вязко-невязкое взаимодействие

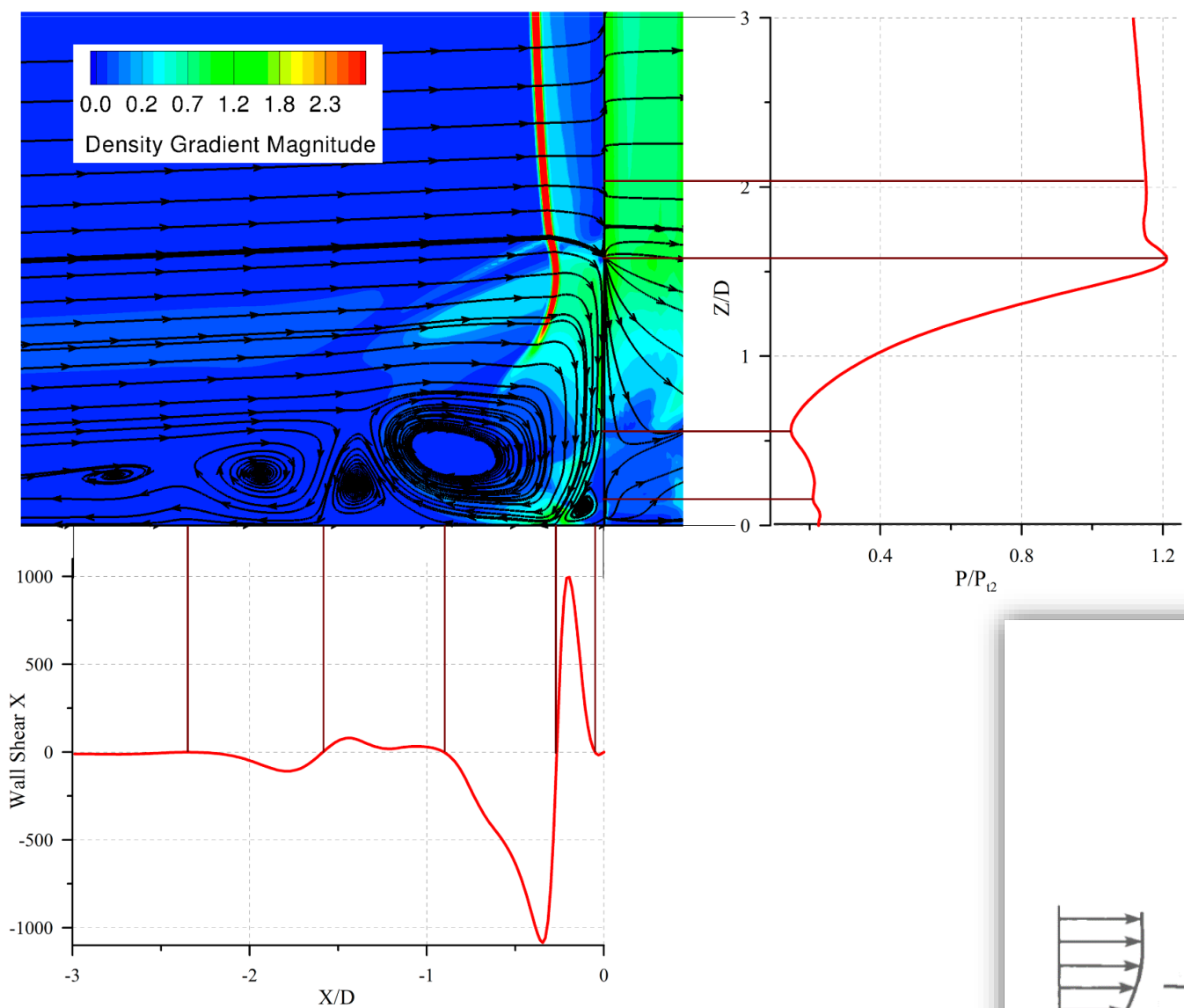
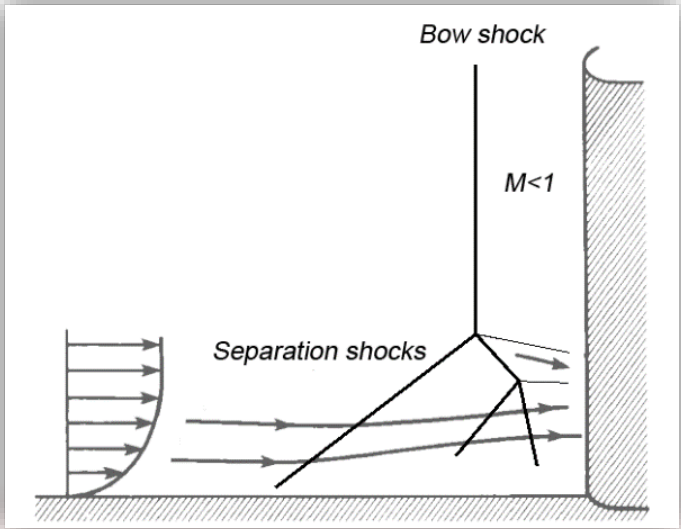


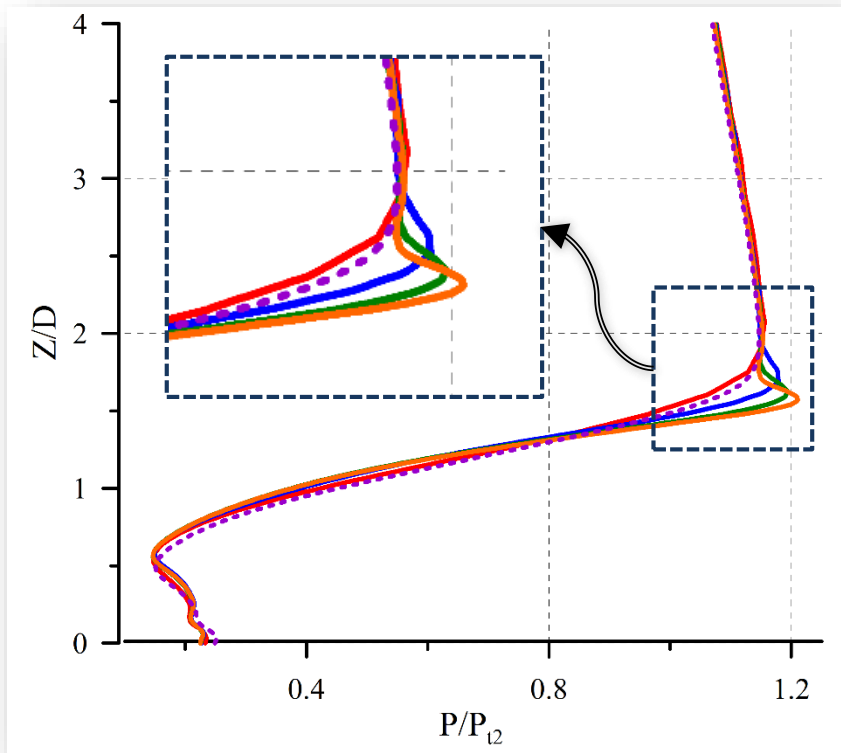
Схема  
течения:





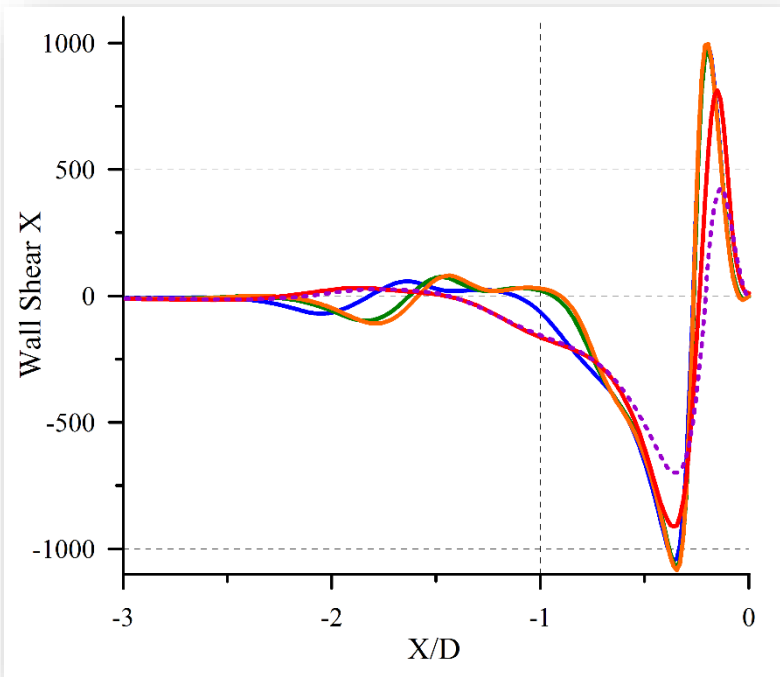
Сеточная сходимость

«невязкие» эффекты

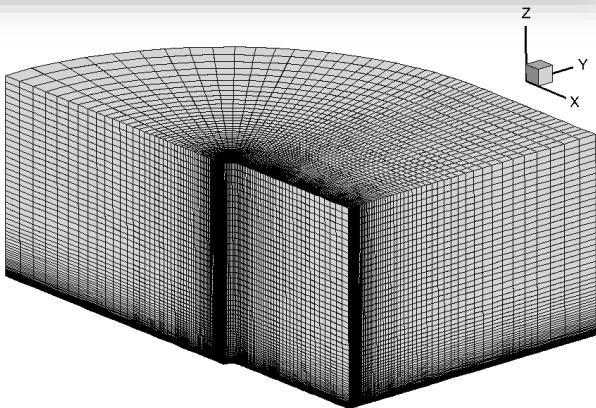


- Сетка №1 (0.3 млн), 2 order
- Сетка №2 (2.4 млн), 2 order
- Сетка №3 (8.1 млн), 2 order
- Сетка №4 (13.3 млн), 2 order
- ... Сетка №4 (13.3 млн), 1 order

«вязкие» эффекты

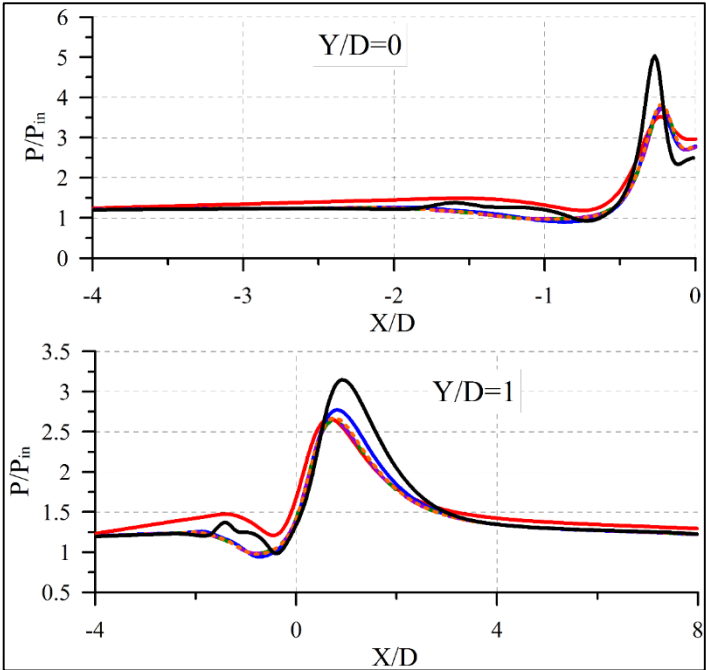
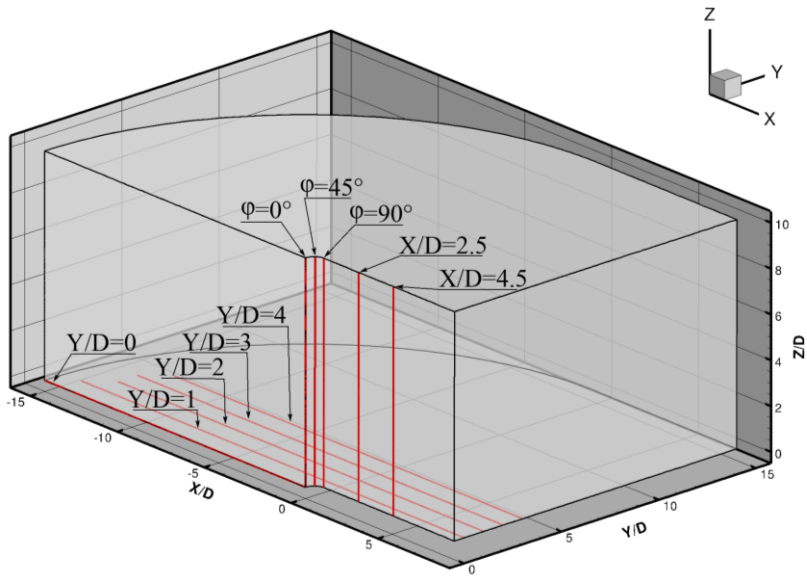


сетка №1

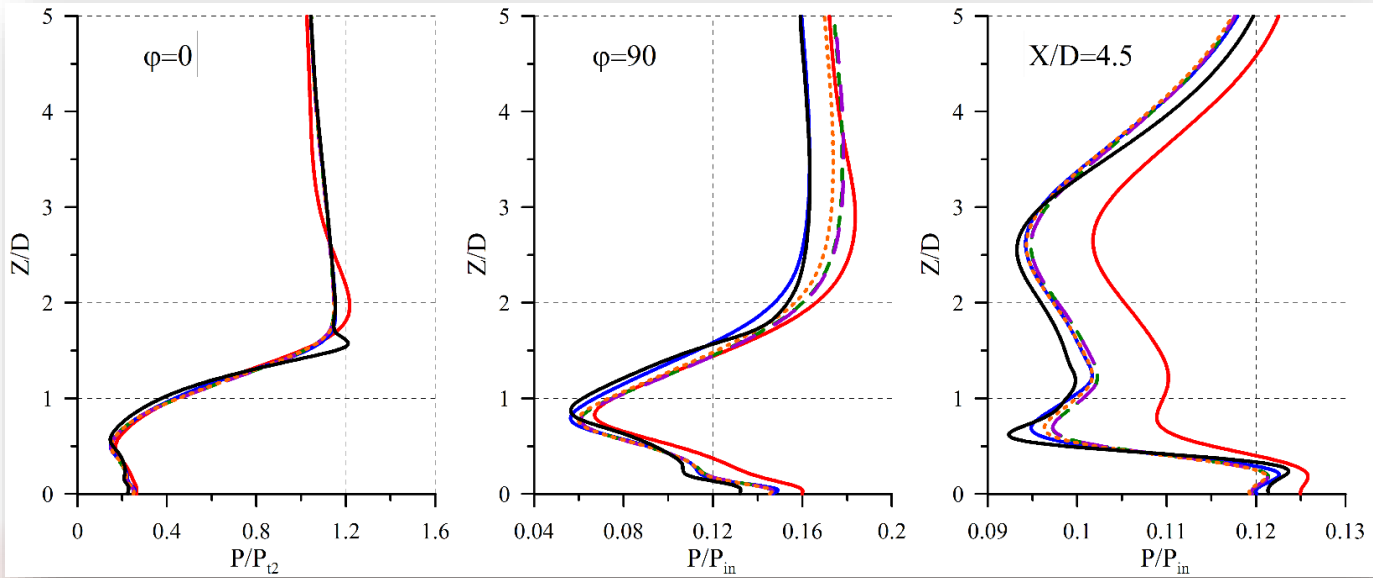


Расчеты по схемам первого порядка

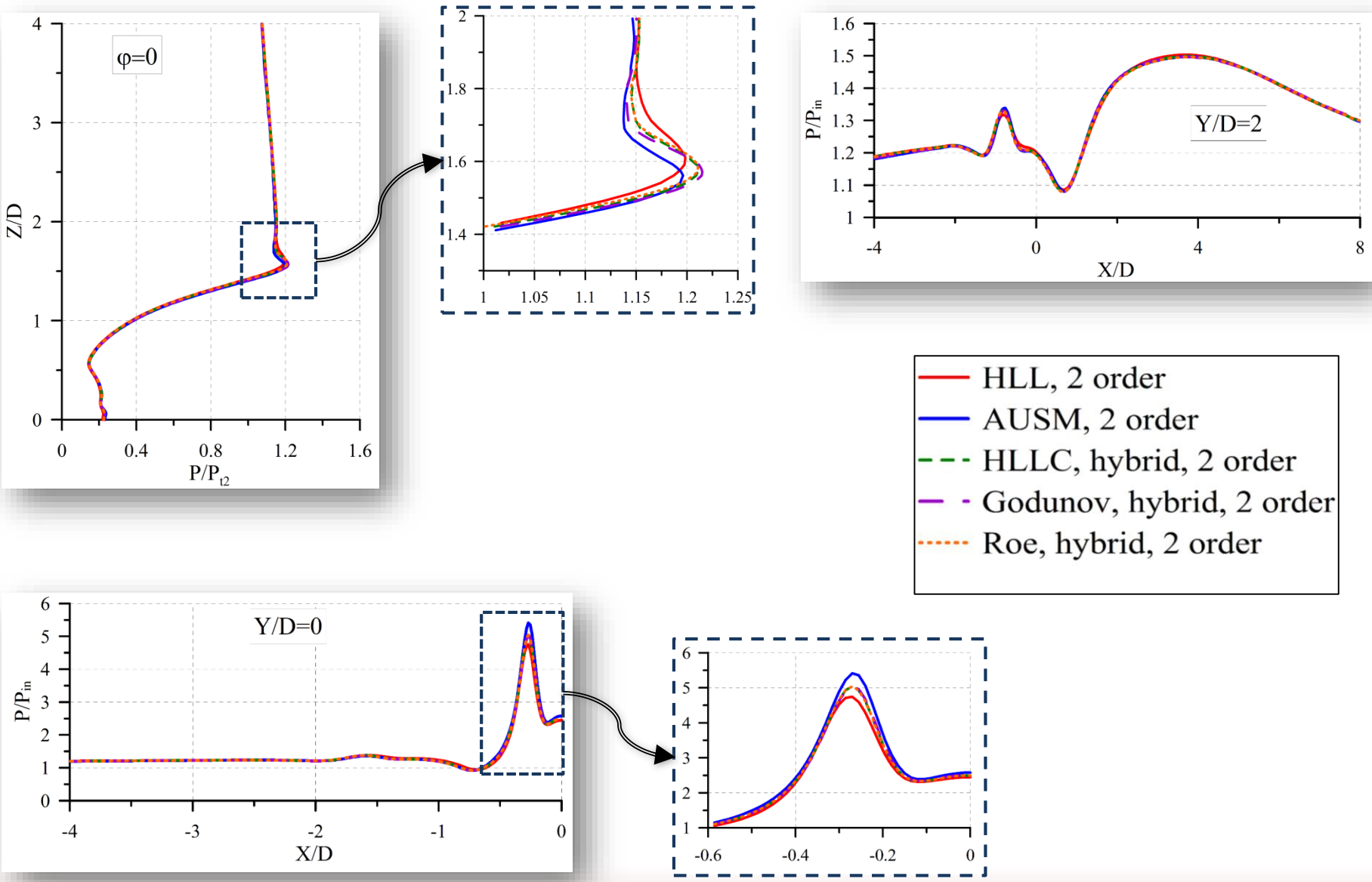
Распределение давления вдоль линий:



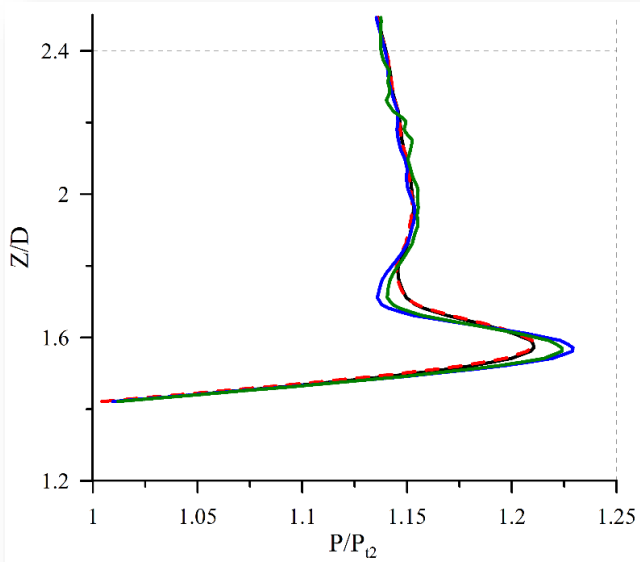
- HLL, 1 order
- AUSM, 1 order
- HLLC, hybrid, 1 order
- Godunov, hybrid, 1 order
- Roe, hybrid, 1 order
- HLLC, hybrid, 2 order



Расчеты по схемам второго порядка



Применение ограничителей



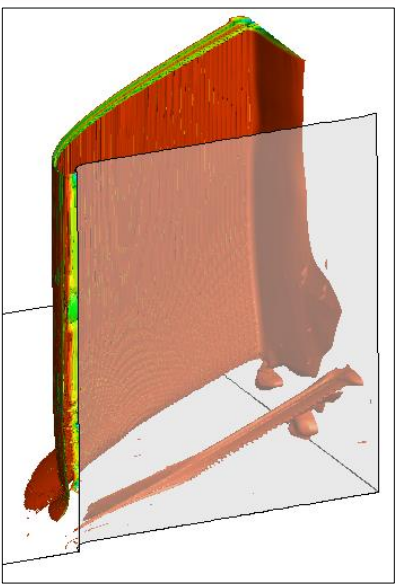
Влияние способа  
восстановления точек:

- 1D-limiter, BK
- - - 1D-limiter, DM

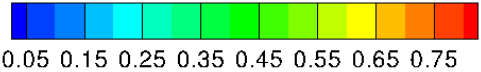
van Albada  $\psi_{VL}(R) = \frac{R^2 + R}{R^2 + 1}$

Скалярные ограничители:

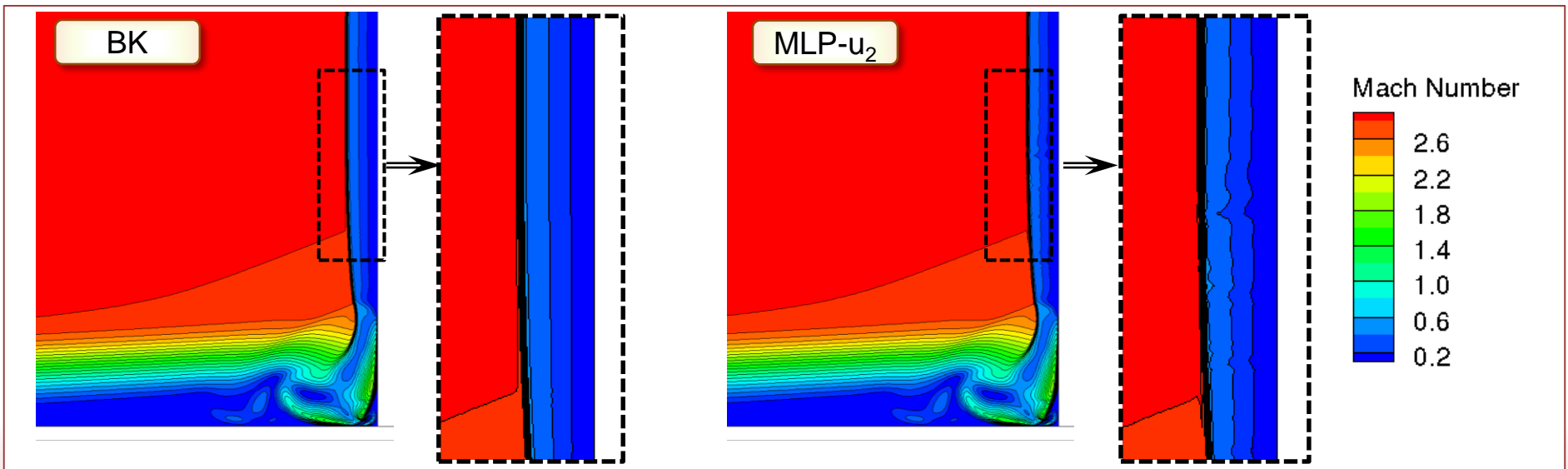
- Scalar limiter, VK
- Scalar limiter, MLP-u2



Limiter MLP-u<sub>2</sub>



Поле числа Маха в плоскости симметрии



# Сравнение со статьей Tutty, 2013

O. R. Tutty, G. T. Roberts and P. H. Schuricht, 2013,  
High-speed laminar flow past a fin-body junction

Определяющие параметры:

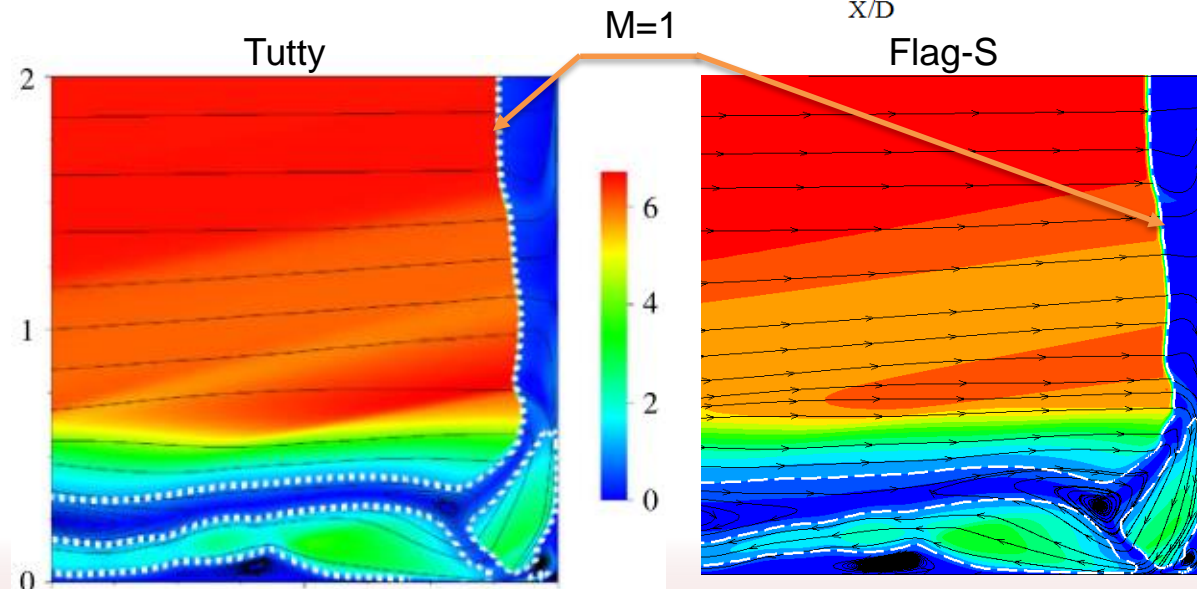
$$M_{in}=6.7$$

$$Re = 5 \cdot 10^6 [1/m],$$

$$Re_D = 3.75 \cdot 10^4$$

$$D/\delta = 1$$

Поле числа Маха в  
плоскости симметрии:



## Заключение

- Неструктурированный код SINF/Flag-S дополнен возможностью расчета вязких и невязких газодинамических течений при помощи различных схем, основанных на решении задачи Римана о распаде разрыва, первого и второго порядков точности.
- Проведено тестирование реализованных схем на простых задачах, исследовано влияния типа сеточных элементов, способа восстановления точек для квазиодномерных ограничителей, исследовано влияние различных способов определения давления на непроницаемых границах.
- Проведены расчеты для задачи сверхзвукового обтекания вязким газом области сопряжения затупленного тела и пластины
- Показано, что вблизи возникающей перед телом головной ударной волной может возникать «карбункул»-неустойчивость, для подавления которой требуются специальные методы, в частности, использование гибридных схем.
- Исследована структура течения, включающая невязкие эффекты (ударные волны) и вязкие (отрыв и образование подковообразных вихрей).
- Исследованы сеточная сходимость и некоторые аспекты применения различных схем для разрешения структуры течения.

## Направления дальнейших исследований

- Поиск/формулировка/решение трехмерные тестовых задач вязко-невязкого взаимодействия
- Моделирование вязко-невязкого взаимодействия в турбулентных сжимаемых течениях (на основе RANS подхода и вихреразрезающих подходов)

***Спасибо за внимание!***