



# Конечно-объемные методы для совместных задач в рамках платформы INMOST: вызовы и решения

**Кирилл Терехов<sup>1</sup>, Юрий Василевский<sup>1,2,3</sup>**

<sup>1</sup>Институт Вычислительной Математики им. Г.И. Марчука Российской Академии Наук

<sup>2</sup>Сеченовский Университет

<sup>3</sup>Московский Физико-Технический Университет

**CFD-Weekend, ИПМ РАН, 2 декабря, 2018**



# INMOST

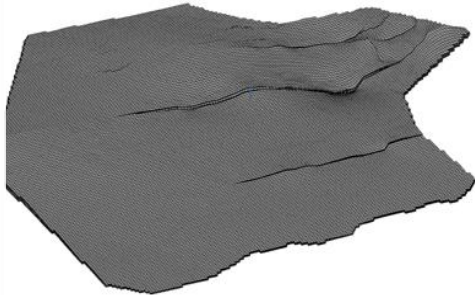
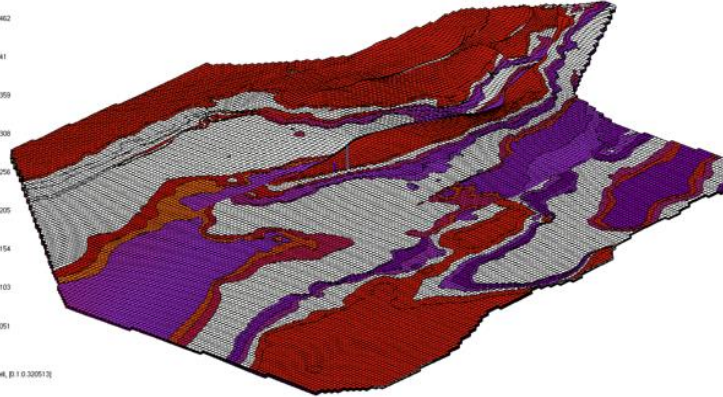
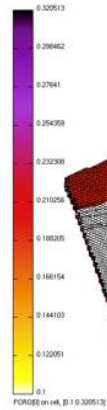
функционал



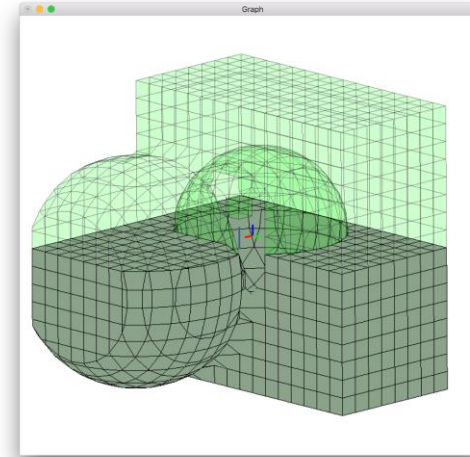
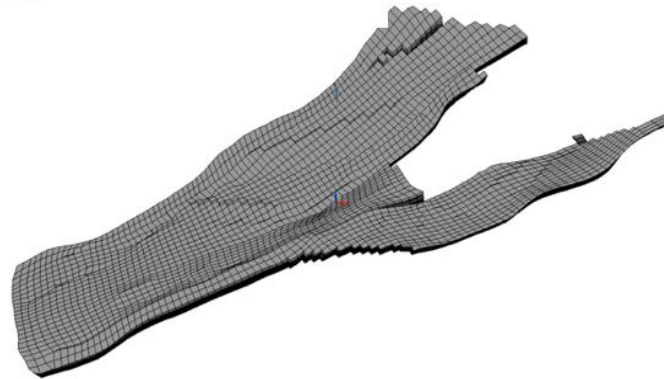
# INMOST: Поддержка сеток



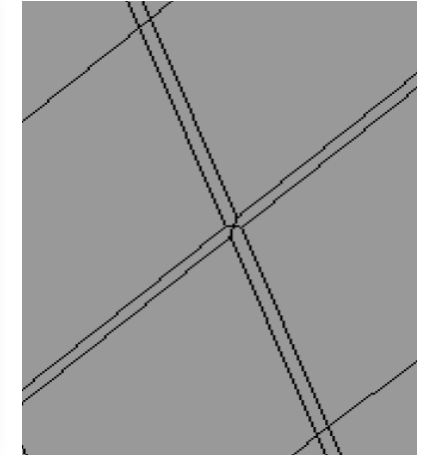
Модель  
человеческого тела



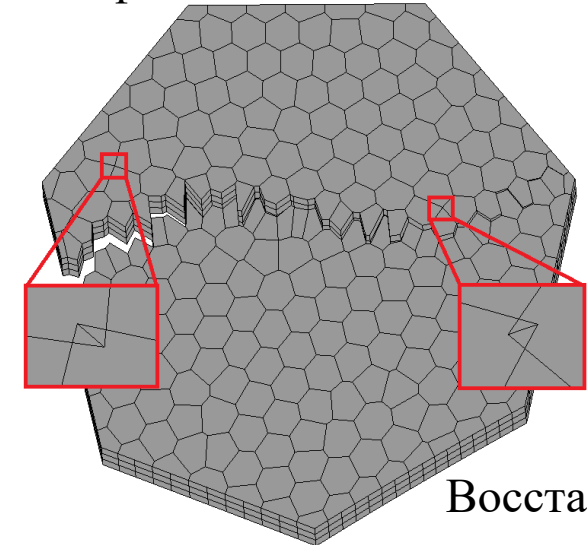
Геологические сетки с выклиниванием,  
поддержка входных данных коммерческих  
симуляторов нефти и газа



Сложные модификации



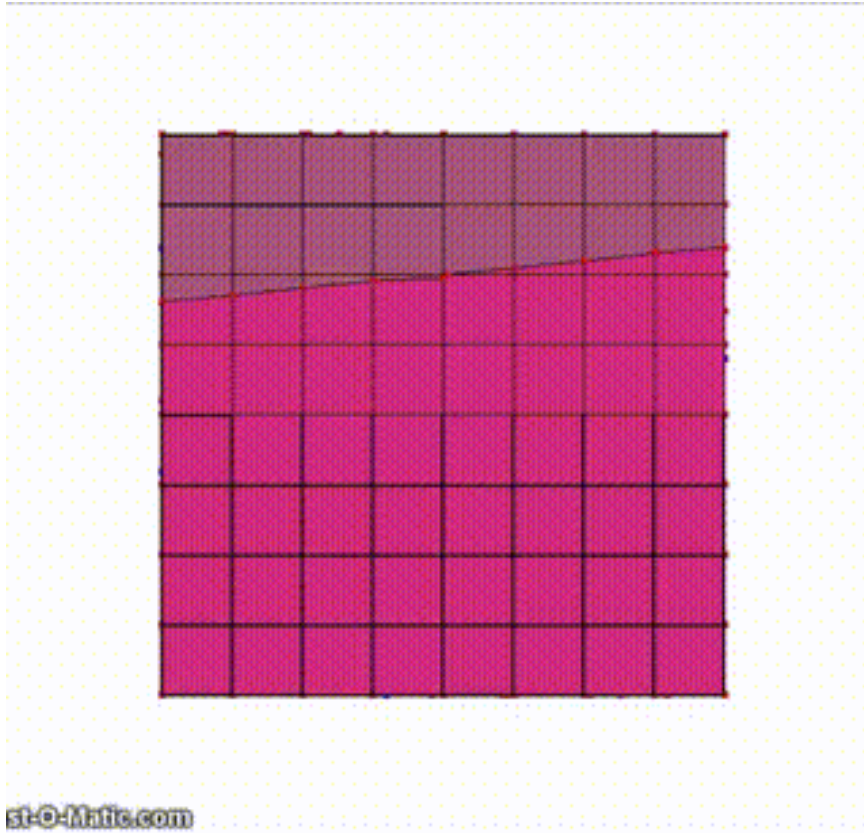
Вскрытие трещин



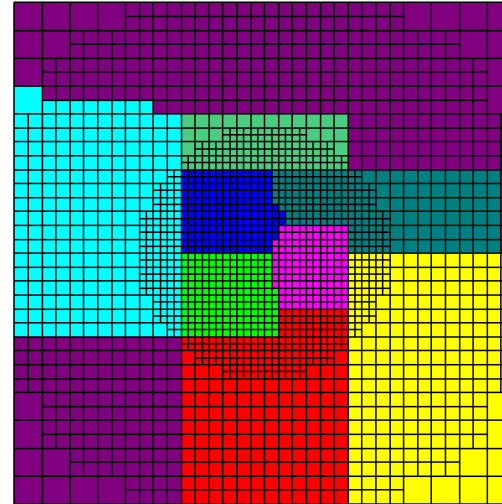
Восстановление  
сеток



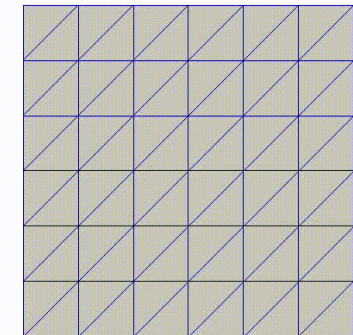
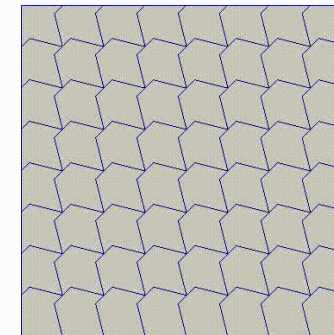
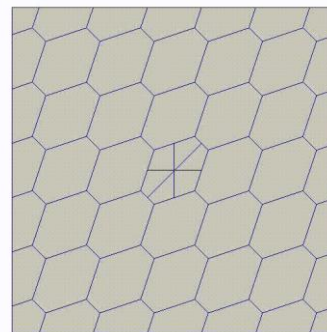
# INMOST: Поддержка динамических сеток



Встроенный пример **OctreeCutcell**



Параллельная масштабируемая адаптация и балансировка сетки

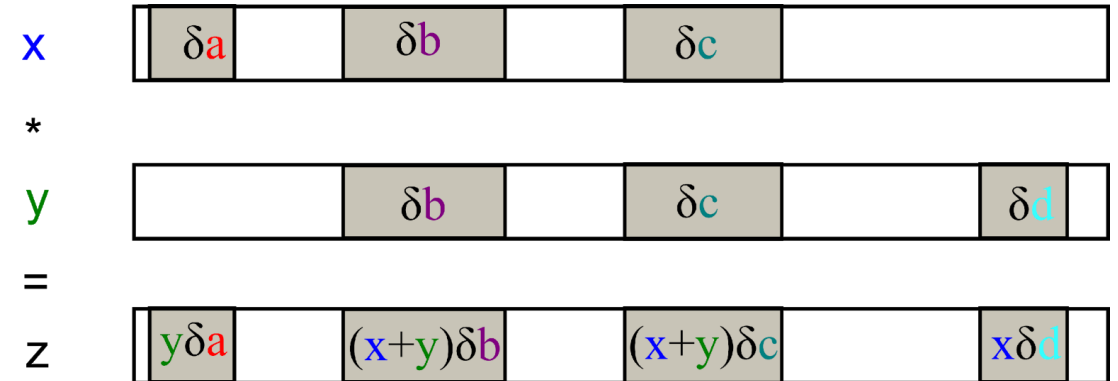


Пример **AdaptiveMesh** для адаптации сеток общего вида



# INMOST: Авто-дифференцирование

- Позволяет одним кодом получить:
  - невязку
  - **якобиан**
  - **гессиан**
- Очень **полезно** для **сложных** нелинейных задач



$$x\{\partial a + \partial b + \partial c\} * y\{\partial b + \partial c + \partial d\} = x * y\{y\partial a + (x+y)\partial b + (x+y)\partial c + x\partial d\}$$

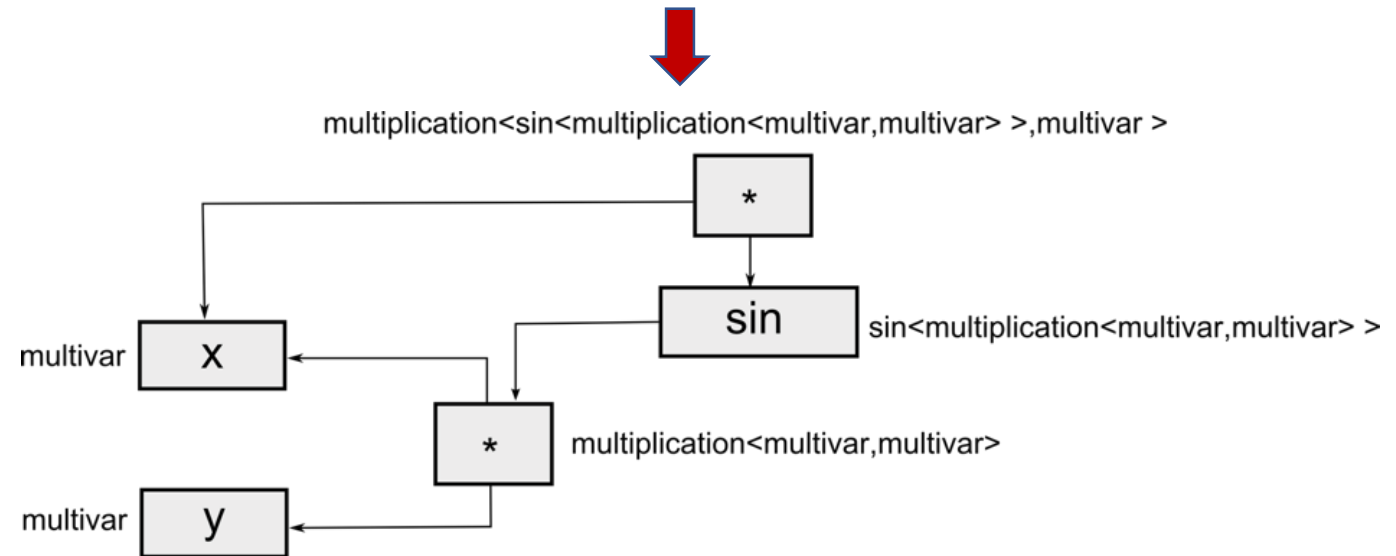




# INMOST: Авто-дифференцирование

- Реализовано посредством шаблонных выражений в C++
- Большая часть кода формируется и оптимизируется на этапе компиляции
- Поддерживает матрично-векторные операции, подмножество функционала **BLAS Lapack**
- Простота использования

```
variable x, y, z;  
...  
z = x*sin(x*y)
```

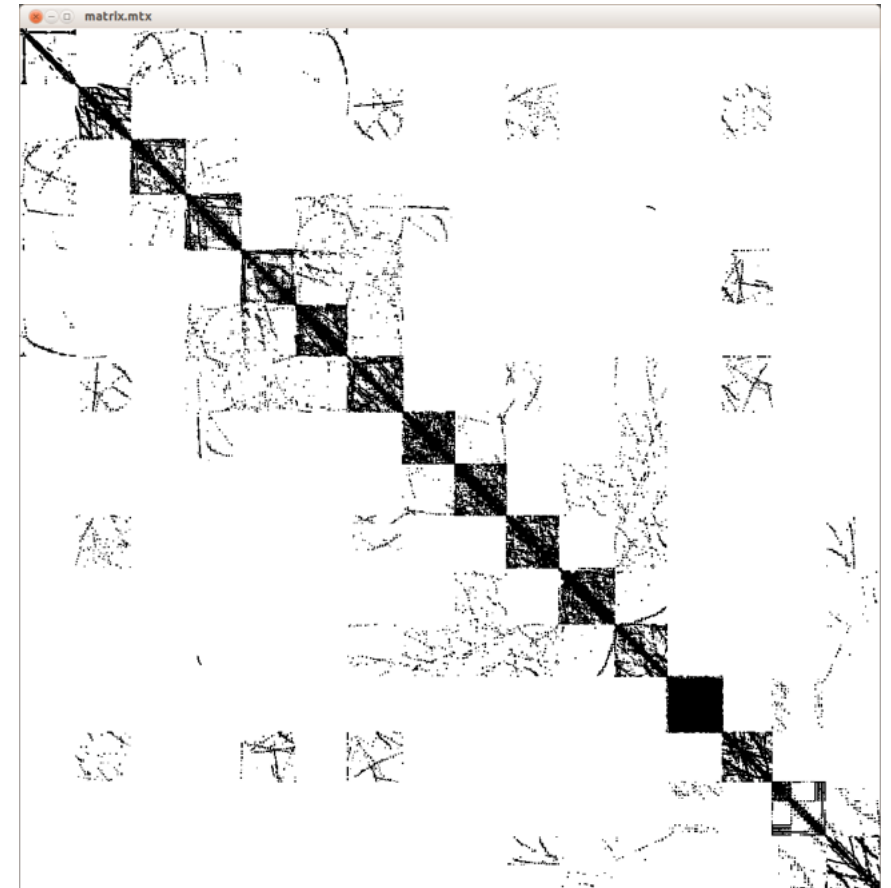


внутреннее представление выражения  $x*\sin(x*y)$



# INMOST: Решение линейных систем

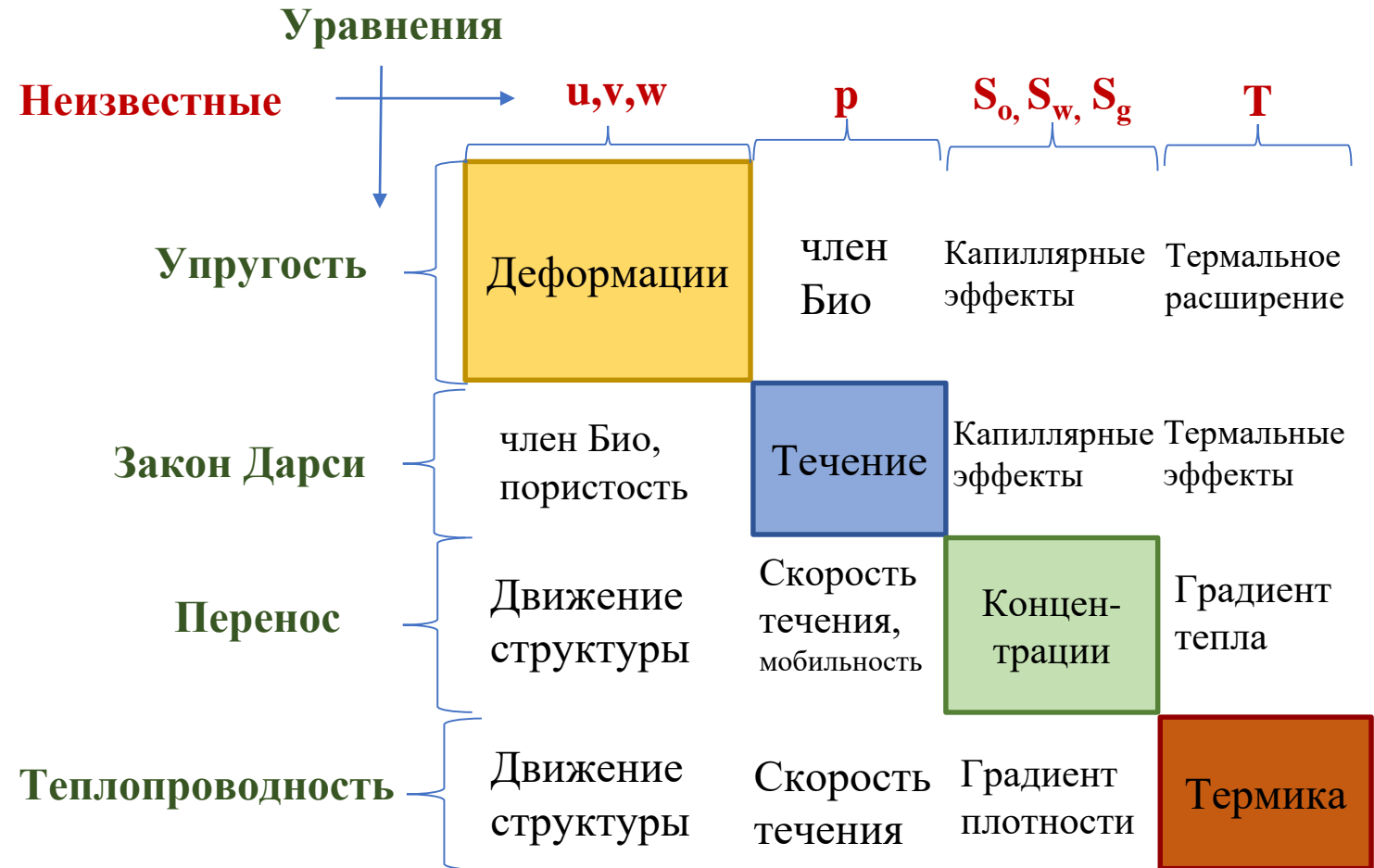
- **Простые** структуры для параллельной сборки систем линейных уравнений.
- **Параллельные** методы решения:
  - Вызов PETSc, Trilinos, SuperLU, Hypre.
  - Встроенные методы:
    - ILU( $\tau, \tau^2$ ) и Crout-ILU( $\tau, \tau^2$ ) второго порядка
    - Максимизация произведения на диагонали
    - Минимизация заполнения
    - Масштабирование в дважды-стохастический вид или I-доминирование
    - Динамический подбор  $\tau$  по числу обусловленности LU
    - Многоуровневое вычисление дополнения по Шуру (**Новое!**)
    - Отбрасывание строк с малым ведущим элементом по диагонали или по числу обусловленности (**Новое!**)
    - Многослойный аддитивный метод Шварца





# INMOST: Мультифизика (Новое!)

- Расщепление симулятора на отдельные **модели**
- **Модели** соединяются через
  - **функции**: мобильность, плотность, пористость
  - **потоки**: член Био, несжимаемость, капиллярное давление
  - **правую часть**: реакции
- Возможно **управлять**:
  - моделями, неизвестными, функциями, связывающими соотношениями, сборкой невязки и якобиана
- Допускает **полностью неявное** решение



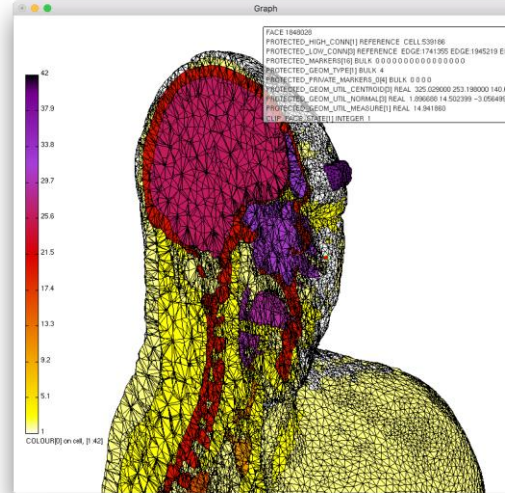
Расщепление на модели в симуляторе резервуара



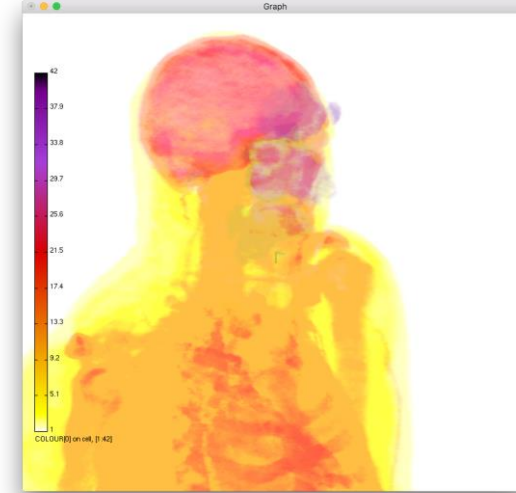


# INMOST: Визуализация (Новое!)

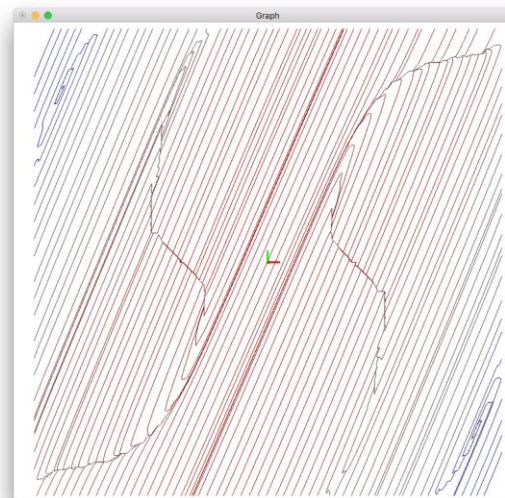
- Examples/DrawGrid
- Широкий функционал:
  - срез сетки
  - изоповерхности
  - отображение объема
  - линии тока
  - вектора
  - ...
  - вывод в векторном формате
- Планируется как подключаемый модуль



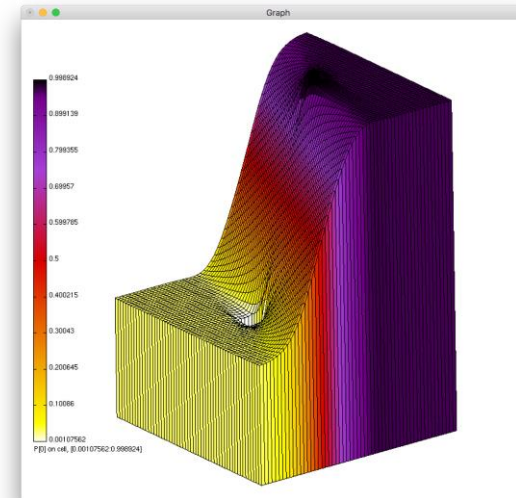
Отображение данных в срезе



Объемное отображение данных



Линии тока



Подъем решения над срезом

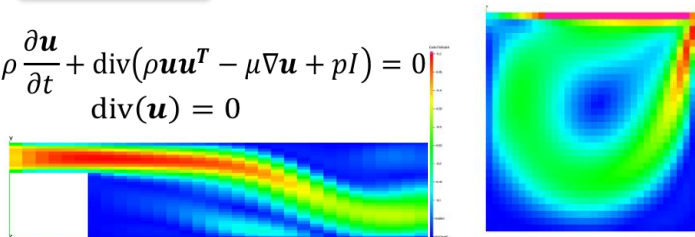


# INMOST: Модели

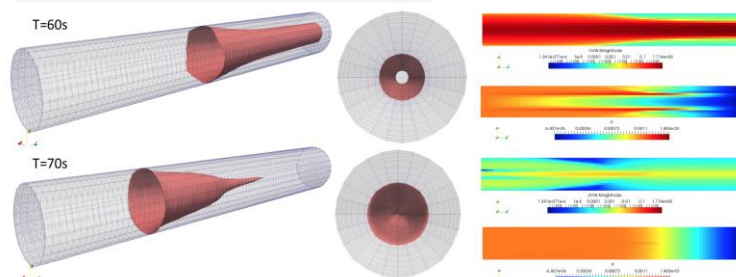
## Течения

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \mu \nabla \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$



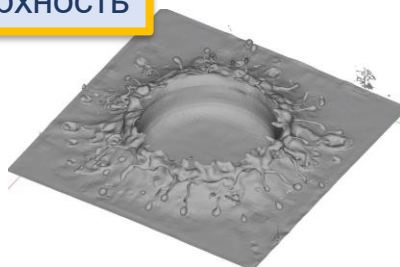
## Образование тромба



## Свободная поверхность

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{u}) = 0$$

$$|\nabla \varphi| = 1$$

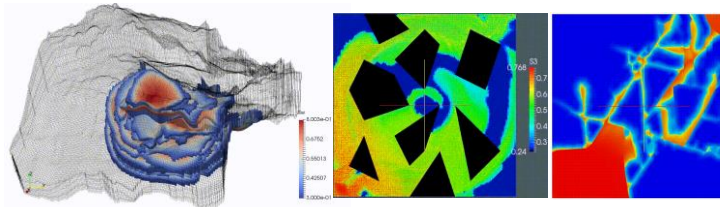


## Многофазная фильтрация

$$\frac{\partial \rho_w \theta S_w}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda_w \mathbb{K}(\nabla p - \rho_w g \nabla z)) = q_w$$

$$\frac{\partial \rho_o \theta S_o}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda_o \mathbb{K}(\nabla p - \nabla P_{Co} - \rho_w g \nabla z)) = q_o$$

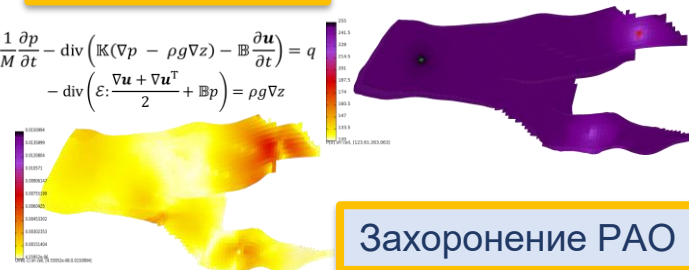
$$\frac{\partial \rho_g \theta (R S_o + S_g)}{\partial t} - \nabla \cdot (\lambda_g \mathbb{K}(\nabla p - \nabla P_{Cg} - \rho_g g \nabla z)) = q_g$$



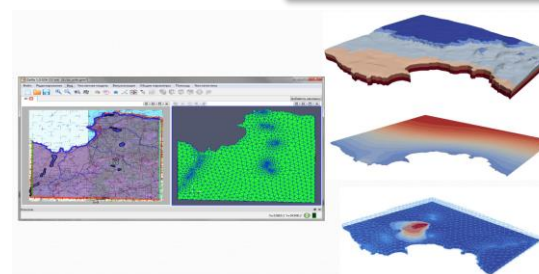
## Поромеханика

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} - \operatorname{div}(\mathbb{K}(\nabla p - \rho g \nabla z) - \mathbb{B} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}) = q$$

$$-\operatorname{div}\left(\varepsilon: \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2} + \mathbb{B} p\right) = \rho g \nabla z$$

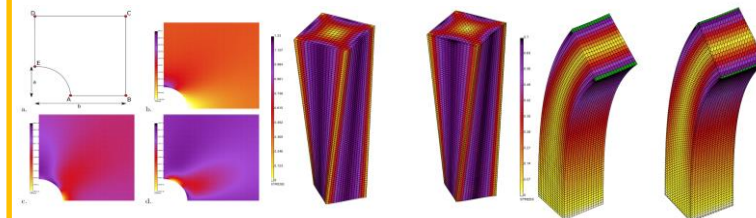


## Захоронение РАО

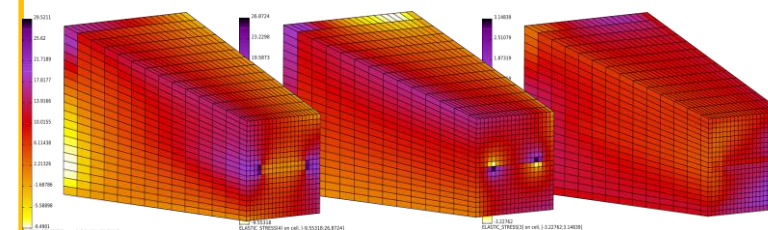


## Механика

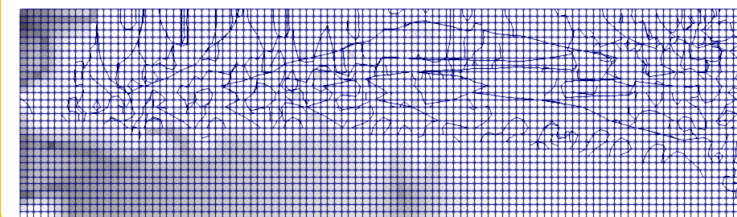
$$-\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) = 0, \quad \mathbb{C}: \boldsymbol{\sigma} = \frac{\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T}{2}$$



## Контактная механика



## Разрушение





# Задача

актуальность и сложности

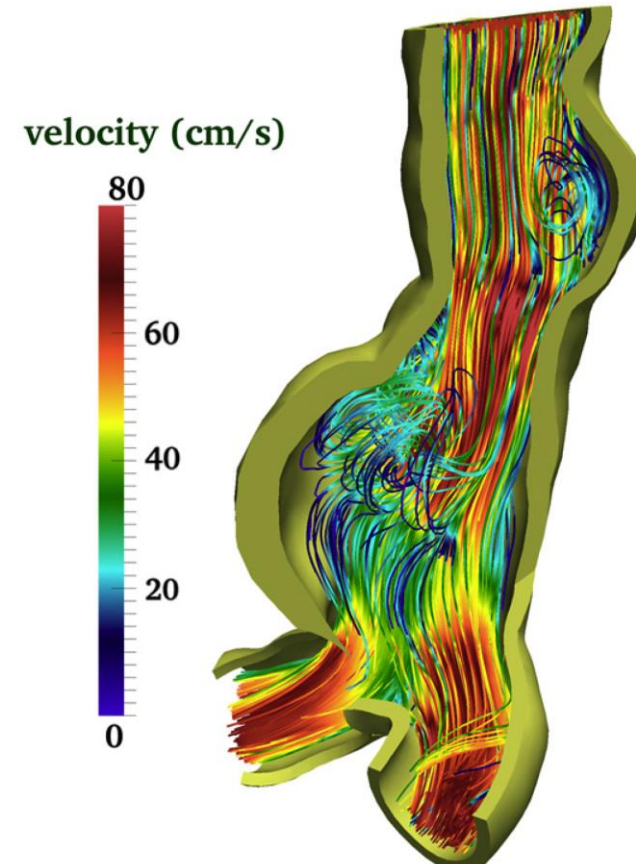
Совместно с Анасом Бухнита и Виталеем Вольпертом





# Задача

- Построение **трехмерной** модели течения и свертываемости крови, образования тромба при повреждении стенок сосуда
- **Трехмерная** модель нужна для оценки поведения для сложной, персонифицированной геометрии сосуда или артерии в области сердца

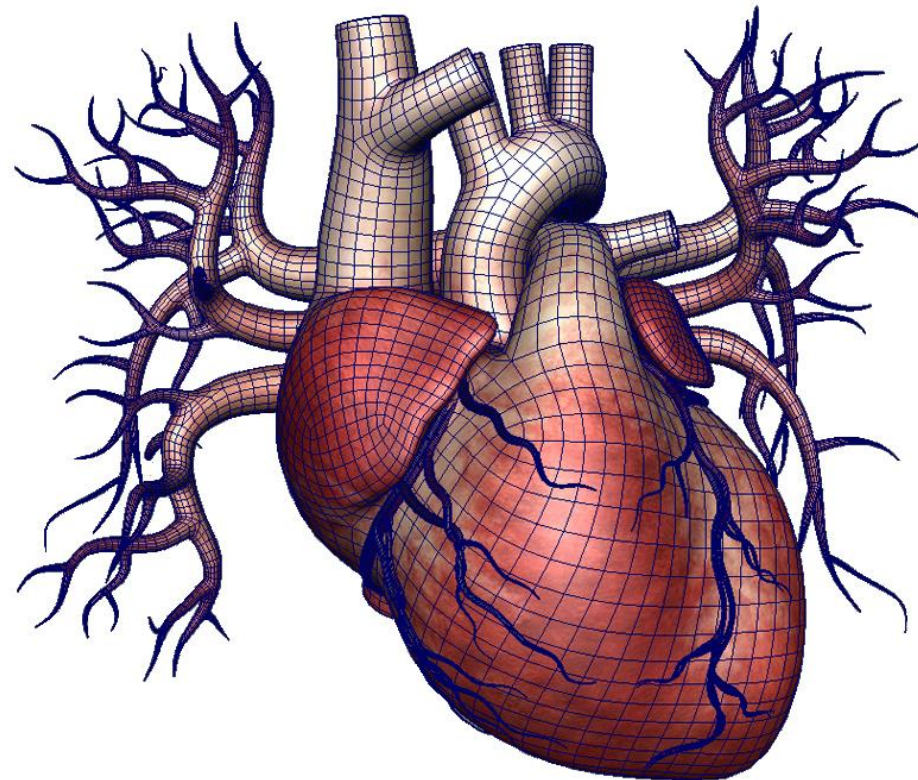


Моделирование аневризма  
(из работы Квартерони)



# Зачем?

- Сердечно-сосудистые заболевания – **основная** причина смертности
  - тромбоэмболические осложнения
- **Трехмерная** модель позволит
  - определить риск перекрытия сосудов тромбом
  - оценить риск развития инфаркта миокарда (совместно с моделью **сердца**)

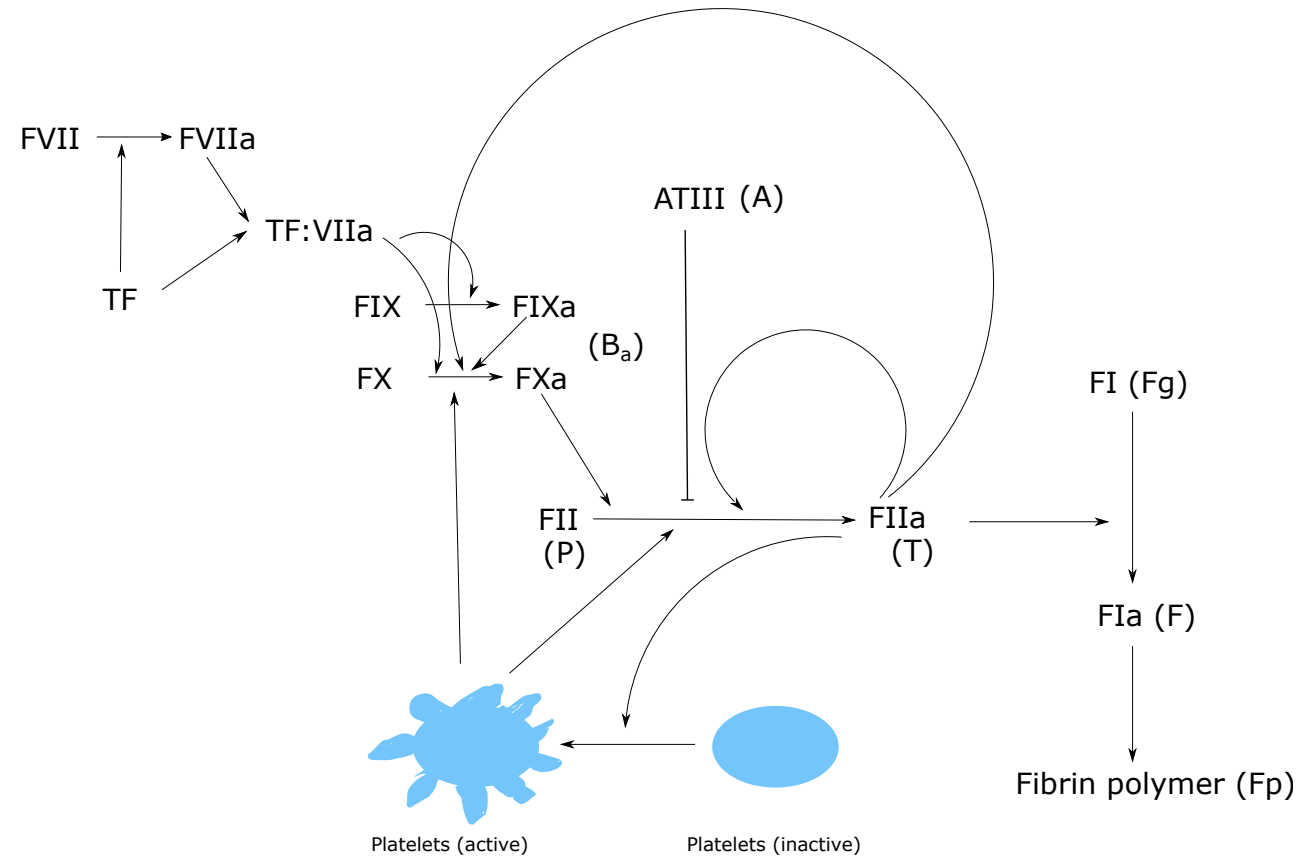


Модель сердца



# Сложности

- Совмещение моделей:
  - **Гемодинамическая** модель с учетом проницаемости среды (фибрин-полимера)
  - Модель **биохимических реакций** свертываемости плазмы крови
  - Модель **тромбоцитов**
- **Каскад реакций** и модель **тромбоцитов** являются **жесткими**: очень малый шаг по времени  $\approx 10^{-5}c$
- Полностью неявная модель







# Упрощения

- Кровь рассматривается как **несжимаемая ньютоновская** жидкость: не учитывается **сложная нелинейная механика** крови
- Стенки сосуда/артерии являются **жесткими**: не учитывается **движение стенок**
- Фибрин-полимер **неподвижен**: модель не описывает **отрыв** тромба



# Система уравнений

- Сохранение моментов: 
$$\frac{\partial \rho \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \mu \nabla \mathbf{u} + pI) = \frac{1}{k(F_p, \phi_c)} \mathbf{u}$$
- Несжимаемость: 
$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$
- Протромбин: 
$$\frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div}(P \mathbf{u} - D \nabla P) = -(k_1 \phi_c + k_2 B_a + k_3 T + k_4 T^2 + k_5 T^3) P$$
- Тромбин: 
$$\frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div}(T \mathbf{u} - D \nabla T) = (k_1 \phi_c + k_2 B_a + k_3 T + k_4 T^2 + k_5 T^3) P - k_6 AT$$
- Тромбообразующие факторы F1Xa, Fxa: 
$$\frac{\partial B_a}{\partial t} + \operatorname{div}(B_a \mathbf{u} - D \nabla B_a) = (k_7 \phi_c + k_8 T)(B^0 - B_a) - k_9 AB_a$$
- Антитромбин: 
$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{div}(A \mathbf{u} - D \nabla A) = -k_6 A - k_9 AB_a$$
- Фибриноген: 
$$\frac{\partial F_g}{\partial t} + \operatorname{div}(F_g \mathbf{u} - D \nabla F_g) = -\frac{k_{10} T F_g}{K_{10} + F_g}$$



# Система уравнений

- Фибрин: 
$$\frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\mathbf{u} - D\nabla F) = \frac{k_{10}TF_g}{K_{10} + F_g} - k_{11}F$$
- Фибрин-полимер: 
$$\frac{\partial F_p}{\partial t} = k_{11}F$$
- Свободные тромбоциты: 
$$\frac{\partial \phi_c}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\tanh\left(\pi\left(1 - \frac{\phi_c + \phi_f}{\phi_{\max}}\right)\right)(\phi_c\mathbf{u} - D_p\nabla\phi_c)\right) = -(k_{12}T - k_{13}\phi_c)\phi_f$$
- Активированные тромбоциты: 
$$\frac{\partial \phi_f}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\tanh\left(\pi\left(1 - \frac{\phi_c + \phi_f}{\phi_{\max}}\right)\right)(\phi_f\mathbf{u} - D_p\nabla\phi_f)\right) = (k_{12}T - k_{13}\phi_c)\phi_f$$
- Проницаемость среды: 
$$\frac{1}{k(F_p, \phi_c)} = \frac{16}{a^2} \tilde{F}_p^{\frac{3}{2}} (1 + 56\tilde{F}_p) \frac{\phi_{\max} + \phi_c}{\phi_{\max} - \phi_c} \quad \text{где} \quad \tilde{F}_p = \min\left(\frac{7}{10}, \frac{F_p}{7000}\right)$$



# Система уравнений

- ГУ на ране: 
$$\frac{\partial B_a}{\partial n} = \frac{\alpha(B^0 - B_a)}{1 + \beta(B^0 - B_a)}$$
- ГУ для Навье-Стокса:
  - прилипание на стенках сосуда
  - задано давление на входе и выходе
- ГУ Дирихле/Неймана для компонент крови
- Параметры модели:
  - из литературы,
  - из настройки ноль-мерной модели генерации тромбина,
  - или подобраны.



# Численные методы

этапы построения модели



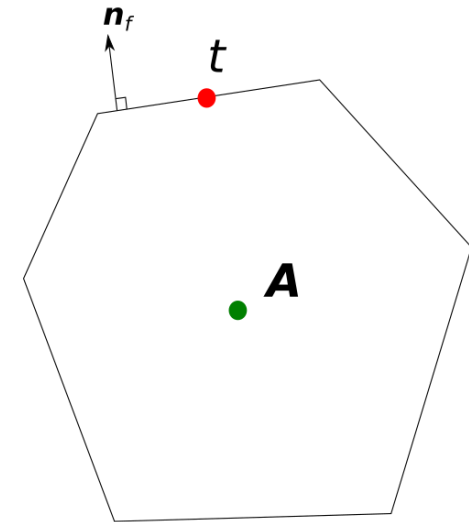
# Метод конечных объемов

- Теорема Гаусса-Грина:

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}) = g \quad \Rightarrow \quad \oint_{\partial V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V g \, dV \quad \Rightarrow \quad \sum_{f \in \mathcal{F}(V)} \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{n}_f |f| = g|V|$$

- Требуется аппроксимация потока на грани:

$$t = \mathbf{A}_f \cdot \mathbf{n}_f$$







# МКО для Навье-Стокса

- Выражение для потока:

$$\mathbf{t} = \begin{cases} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{n} - \mu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} + p \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{u} \end{cases}$$

- Устойчивая** аппроксимация:

$$\begin{cases} p \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{u} \end{cases} = \begin{pmatrix} & \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T & \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \mathbf{n} \mathbf{n}^T & \mathbf{n} \\ & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{n} \mathbf{n}^T & \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix}$$

Положительные и отрицательные  
собственные значения

Положительные  
собственные значения

Отрицательные  
собственные значения



# МКО для Навье-Стокса

- Выражение для потока:

$$\mathbf{t} = \begin{cases} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{n} - \mu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} + p \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{u} \end{cases}$$

- Аппроксимация **второго порядка**:

$$(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{n})' = \rho (\mathbf{u} \mathbf{n}^T + \mathbf{I} \mathbf{n}^T \mathbf{u}) = Q(\mathbf{u}), \quad \text{sgn}(\lambda_i(Q(\mathbf{u}))) \cdot (\mathbf{n}^T \mathbf{u}) \geq 0, \quad \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{n} = \frac{1}{2} Q(\mathbf{u}) \mathbf{u}$$

$$\mathbf{t}^1 = \frac{1}{2} Q^+(\mathbf{u}_1) (\mathbf{u}_1 + 2 \nabla \mathbf{u}_1 (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1)) + \frac{1}{2} Q^-(\mathbf{u}_1) (\mathbf{u}_2 + \nabla \mathbf{u}_1 (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1) + \nabla \mathbf{u}_2 (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_2))$$

$$\mathbf{t}^2 = \frac{1}{2} Q^-(\mathbf{u}_2) (\mathbf{u}_2 + 2 \nabla \mathbf{u}_2 (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_2)) + \frac{1}{2} Q^+(\mathbf{u}_2) (\mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_1 (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_1) + \nabla \mathbf{u}_2 (\mathbf{x}_f - \mathbf{x}_2))$$

$$\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{n} \approx \frac{1}{2} (\mathbf{t}^1 + \mathbf{t}^2)$$



# МКО для Навье-Стокса

- Выражение для потока:

$$\mathbf{t} = \begin{cases} \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T \mathbf{n} - \mu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} + p \mathbf{n} \\ \mathbf{n}^T \mathbf{u} \end{cases}$$

- Расщепление **второго порядка**:

$$-\mu \nabla \mathbf{u} \mathbf{n} = \underbrace{\mu \frac{(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|}}_{\text{Двухточечная часть}} - \underbrace{\frac{\mu}{2} (\nabla \mathbf{u}_1 + \nabla \mathbf{u}_2) \left( \mathbf{n} - \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \right)}_{\text{Поперечная коррекция}}$$

- Везде расчет градиентов выполнялся по теореме Грина



# МКО для компонент крови

- Поток вида:  $\mathbf{n}^T (C\mathbf{u} - D\nabla C)$
- Перенос: аппроксимация против потока **первого порядка**:

$$C\mathbf{n}^T \mathbf{u} \approx \frac{1}{2} (C_1(\mathbf{n}^T \mathbf{u} + |\mathbf{n}^T \mathbf{u}|) + C_2(\mathbf{n}^T \mathbf{u} - |\mathbf{n}^T \mathbf{u}|))$$

- Диффузия: нелинейная двухточечная аппроксимация **второго порядка**:

$$D\mathbf{n}^T \nabla C \approx D \frac{(C_1 - C_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} - D(\mu_1 \nabla C_1 + \mu_2 \nabla C_2) \cdot \left( \mathbf{n} - \frac{(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \right) = D(T_1 C_1 - T_2 C_2)$$

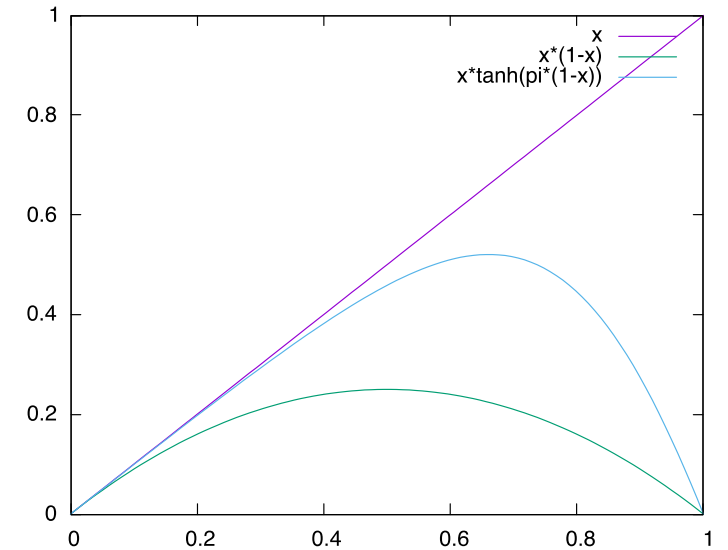
- Решение **неотрицательное** – важно для реакций!



# МКО для уравнения потока трафика

- Поток вида:  $\lambda(C)n^T u$ 
  - перенос:  $\lambda(C) = C$
  - трафик:  $\lambda(C) = C(1 - C)$
  - наш случай:  $\lambda(C) = C \tanh(\pi(1 - C))$
- Аппроксимация против потока **первого порядка**:

$\lambda'(C_1)n^T u$	$\lambda'(C_2)n^T u$	$t$
+	+	$\lambda(C_1)n^T u$
-	-	$\lambda(C_2)n^T u$
+	-	$\min(\lambda(C_1), \lambda(C_2))n^T u$
-	+	$\lambda(C)n^T u, \lambda'(C) = 0$



Трафик в Москве  
(картинка из интернета)



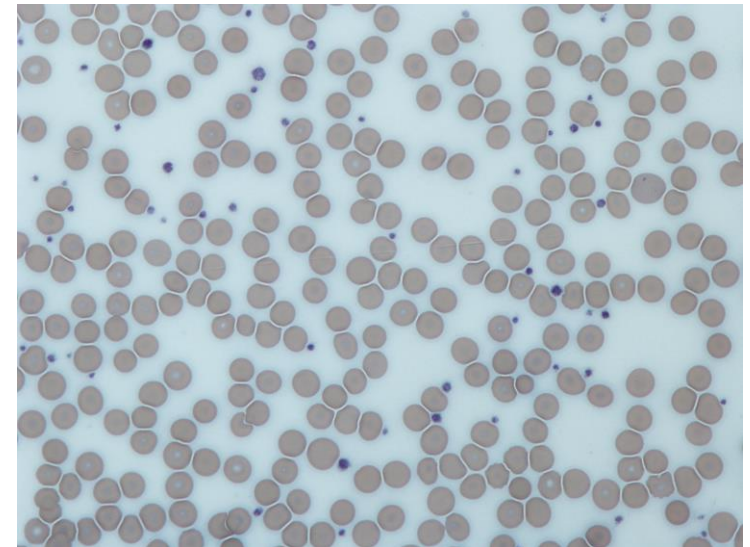
# МКО для тромбоцитов

- Поток вида:  $\mathbf{t}(\phi_c, \phi_f) = \tanh\left(\pi\left(1 - \frac{\phi_c + \phi_f}{\phi_{max}}\right)\right) \mathbf{n}^T (\mathbf{u} - D_p \nabla) \begin{pmatrix} \phi_c \\ \phi_f \end{pmatrix}$
- Анализ вклада в якобиан:

$$J(\phi_c, \phi_f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{t}_1(\phi_c, \phi_f)}{\partial \phi_c} & \frac{\partial \mathbf{t}_1(\phi_c, \phi_f)}{\partial \phi_f} \\ \frac{\partial \mathbf{t}_2(\phi_c, \phi_f)}{\partial \phi_c} & \frac{\partial \mathbf{t}_2(\phi_c, \phi_f)}{\partial \phi_f} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\phi_c \\ d\phi_f \end{pmatrix} = Q(\phi_c, \phi_f) \begin{pmatrix} d\phi_c \\ d\phi_f \end{pmatrix}$$

- Введем аргумент от двух ячеек:

$$\Phi = M_1 \begin{pmatrix} \phi_{c,1} \\ \phi_{f,1} \end{pmatrix} + M_2 \begin{pmatrix} \phi_{c,2} \\ \phi_{f,2} \end{pmatrix}$$



Тромбоциты  
(картинка из интернета)





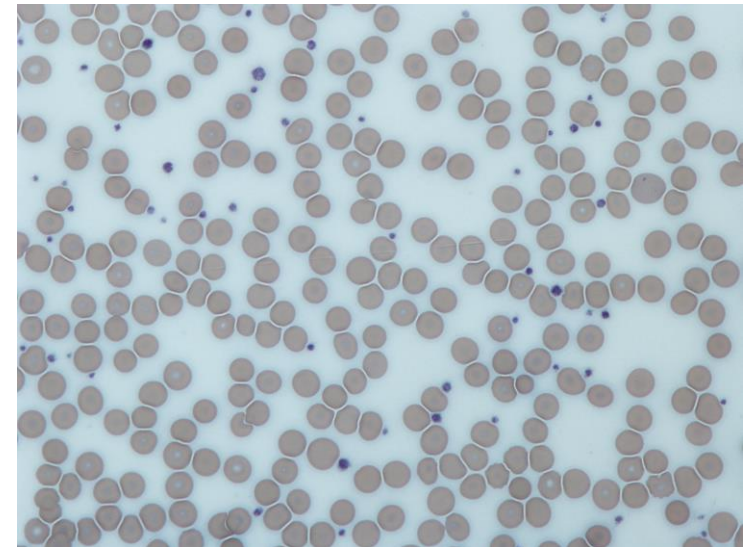
# МКО для тромбоцитов

- Поток вида:  $t(\phi_c, \phi_f) = \tanh\left(\pi\left(1 - \frac{\phi_c + \phi_f}{\phi_{max}}\right)\right) \mathbf{n}^T (\mathbf{u} - D_p \nabla) \begin{pmatrix} \phi_c \\ \phi_f \end{pmatrix}$
- Итеративный поиск  $M_1$  и  $M_2$ :

$$J(\Phi) = Q(\Phi)M_1 \begin{pmatrix} d\phi_{c,1} \\ d\phi_{f,1} \end{pmatrix} + Q(\Phi)M_2 \begin{pmatrix} d\phi_{c,2} \\ d\phi_{f,2} \end{pmatrix}$$

- Матрицы получаются следующим образом:

$$\begin{aligned} Q(\Phi) &= L\Lambda L^T, \\ M_1 &= \frac{1}{2}L(\text{sgn}(\Lambda) + |\text{sgn}(\Lambda)|)L^T \\ M_2 &= \frac{1}{2}L(\text{sgn}(\Lambda) - |\text{sgn}(\Lambda)|)L^T \end{aligned}$$



Тромбоциты  
(картинка из интернета)



# Аппроксимация реакций

- Реакции приводят к очень **малому шагу** даже при неявной интеграции.
- Симптом – **плохой вклад** во вне-диагональные элементы якобиана.
- Подходы для членов дающих плохой вклад:
  - **экстраполяция по времени**, **ограничитель экстраполяции по физике**
  - интерполяция по пространству



# Верификация

модели

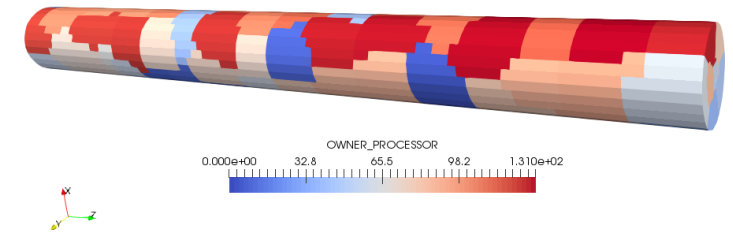


# Несжимаемая жидкость

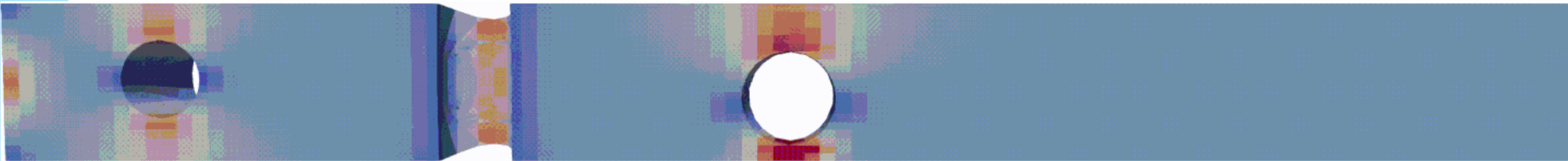
Неизвестные:  $u, v, w, p$

Уравнения: 
$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \mu \nabla \mathbf{u} + p \mathbf{I}) = 0$$
$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

Большой объем литературы для численной верификации



Параллельная реализация:  
36 процессоров: 2.51 сек  
92 процессоров: 1.25 сек

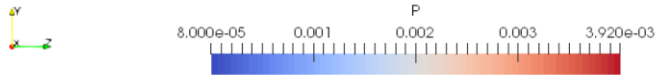




# Несжимаемая жидкость

- Течение Пуазейля в трубе (2-ой порядок):

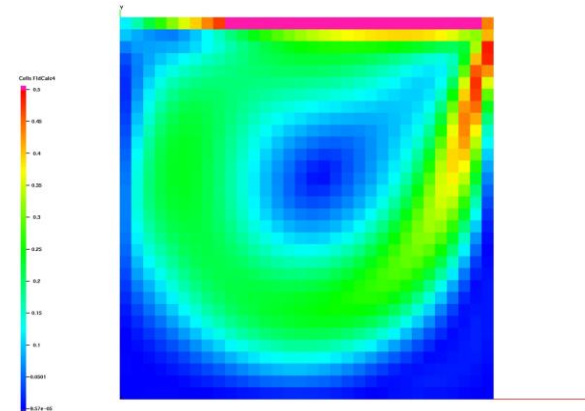
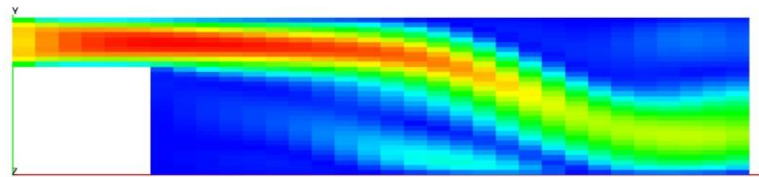
Положительно-определенная аппроксимация div-grad



Прямая аппроксимация div-grad



- Ступенька и кварена (данные Гиа):



- Второй порядок сходимости на аналитическом решении Эшера-Стейнмана



# Сравнение с экспериментом

- Статья с экспериментом о зависимости свертываемости от скорости сдвигового течения: Shen et al, 2008

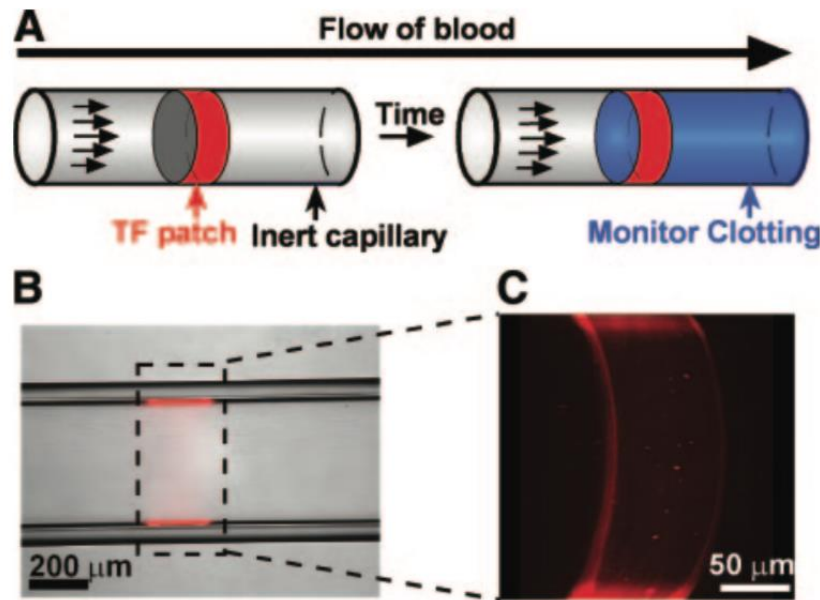
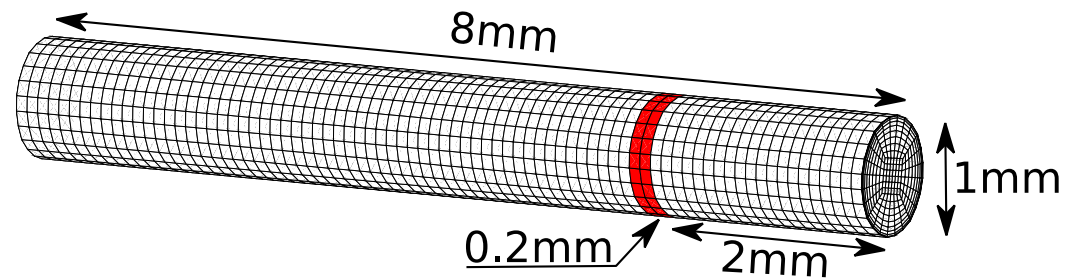
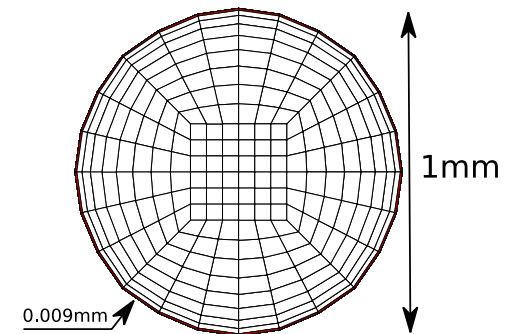


Иллюстрация эксперимента



Расчетная область

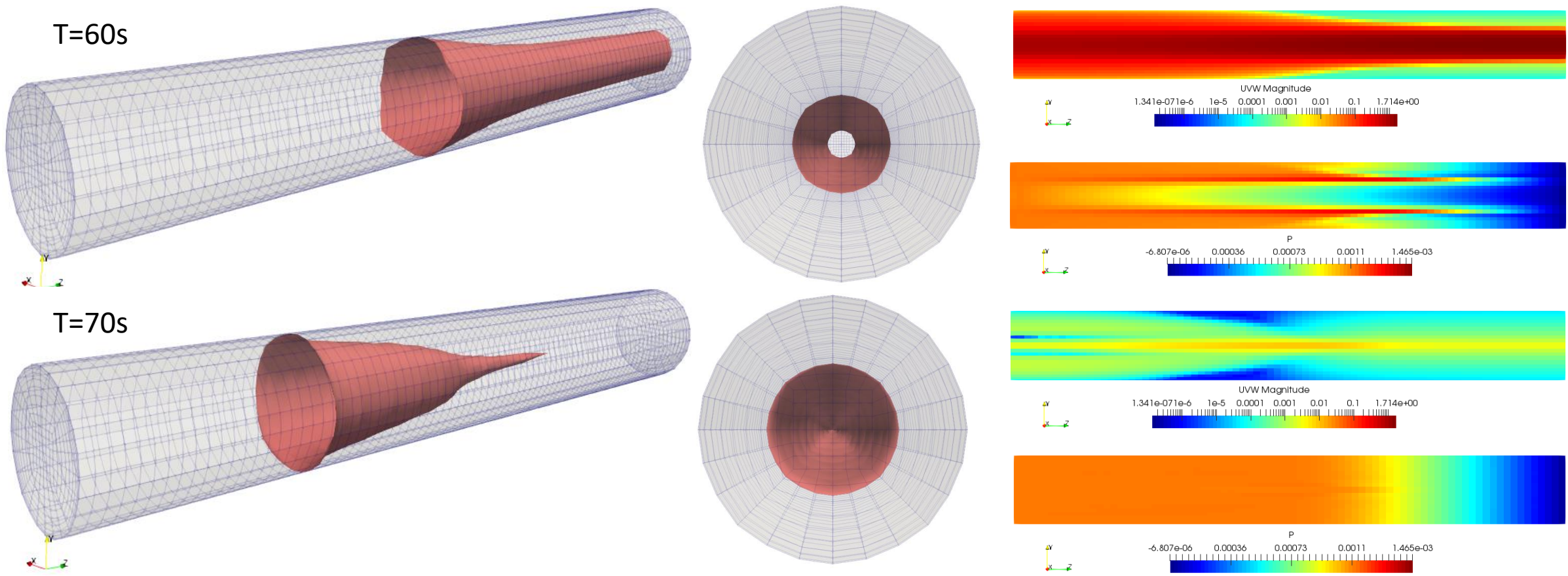


Сечение цилиндра





# Сравнение с экспериментом

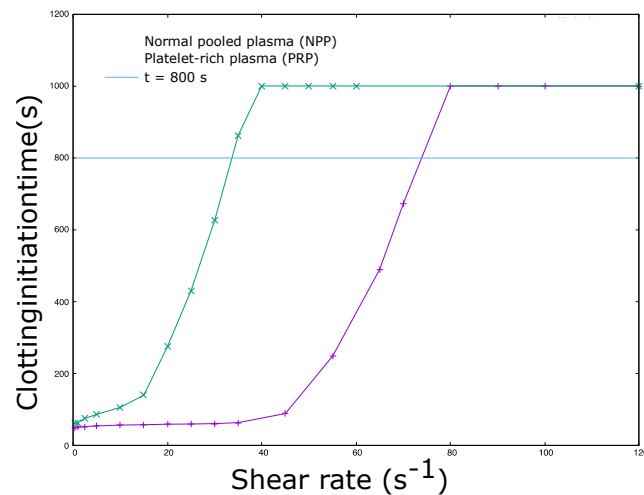


Воспроизведение моделью качественных характеристик эксперимента

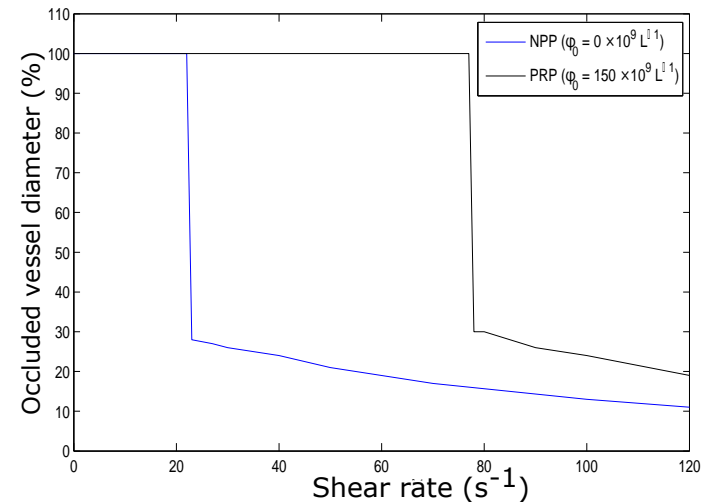


# Сравнение с экспериментом

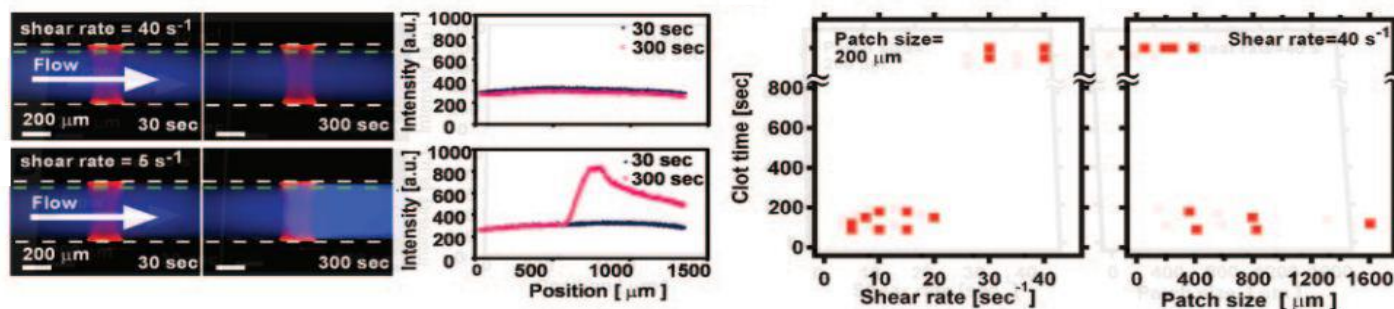
A)



B)



C)



Воспроизведение моделью количественных характеристик эксперимента

Bouchnita, Terekhov, Nony, Volpert, Vassilevski "A validated mathematical model to quantify the effects of platelet count, shear rate, and injury size on the initiation of blood coagulation under venous flow conditions", submitted IJNMBE



# Текущая работа

- 4-х мерный конечно-объемный метод для уравнений Навье-Стокса в подвижной области (Руслан Янбарисов)
- Моделирование образования тромба при ишемических заболеваниях сердца



# ВЫЗОВЫ

мультифизического моделирования



# ВЫЗОВЫ

- Самые разные задачи:
  - Течение жидкостей и газов
  - Фильтрация многофазных жидкостей сквозь породу
  - Течение многофазных жидкостей в емкостях: трубах, танкерах
  - Учет механического взаимодействия между жидкостью и породой
  - Механика контактного взаимодействия и разрушение тел
  - Гидравлический разрыв породы, хирургический разрез мягких тканей
  - Реакции...



# Вызовы

Готовность	Проблема	Подход
+	Очень <b>сложный, нелинейный</b> характер задач	<b>Автоматическая сборка</b> Якобиана
+	<b>Много</b> физических процессов	<b>Возможность комбинировать</b> отдельные модели и решать совместно
+	<b>Взаимозаменяемость</b> физических процессов	<b>Подмена моделей</b> , например Дарси на Навье-Стокс
-	Составление моделей на <b>операторном уровне</b>	Формализация дискретизации в операторы и операторная алгебра
+/-	<b>Жесткие</b> совместные системы и реакции, LBB-неустойчивость	Дискретизации с <b>диагональным преобладанием</b>
-/+	Рассматриваются как <b>однородные</b> так и <b>гетерогенные</b> среды	<b>Учет разрыва</b> свойств задачи в потоке и интерполяции
-/+	Совмещение областей с <b>разными</b> физическими постановками	<b>Учет потока</b> между областями, разрыва в решении

**Спасибо за внимание!**

**КОНТАКТЫ**

- [KIRILL.TERHOV@GMAIL.COM](mailto:KIRILL.TERHOV@GMAIL.COM)
- [YURI.VASSILEVSKI@GMAIL.COM](mailto:YURI.VASSILEVSKI@GMAIL.COM)

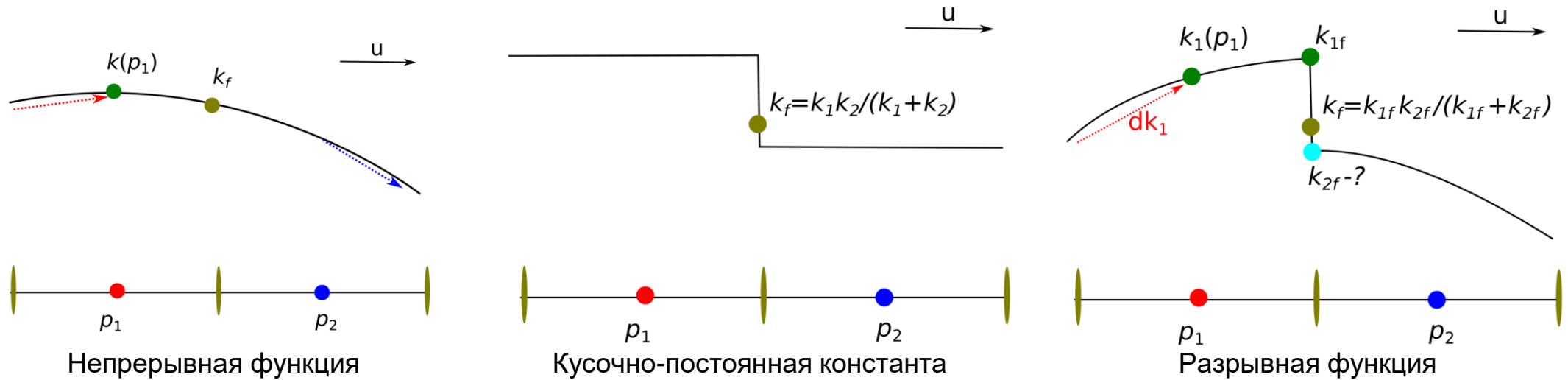
**ССЫЛКИ**

- [WWW.INMOST.ORG](http://WWW.INMOST.ORG)





# Вызовы: гетерогенные среды



- Уравнение вида:  $-\nabla \cdot k(p)u = f, \quad u = \nabla p$ 
  - Непрерывная функция: среда **гомогенная**, **требуется** аппроксимация против потока
  - Кусочно-постоянная константа: среда **гетерогенная**: **гармонические** точки для интерполяции, **гармоническое** среднее для потока
  - Разрывная функция: **как учесть и то и другое?**
- $k(p)$  может быть тензором.





# Вызовы: операторный подход

- Интегральные операторы:
  - обход по элементам
  - вызов точечного оператора
  - запись результата в невязку
  - $\text{div}(\blacksquare)$ ,  $\text{curl}(\blacksquare)$  вместо  $\blacksquare$  - операторы
- Точечные операторы:
  - обход по шаблону
  - вызов точечного оператора
  - выдача результата
  - $\nabla \blacksquare$ ,  $\mathbb{K} \nabla \blacksquare$ ,  $\nabla \times \blacksquare$ ,  $\frac{\nabla \blacksquare + (\nabla \blacksquare)^T}{2}$ ,  $\mathcal{E}: \frac{\nabla \blacksquare + (\nabla \blacksquare)^T}{2}$  вместо  $\blacksquare$  - операторы или данные
- Отслеживание зависимостей, однократное вычисление
- Автоматический синтез кода оптимальной сборки невязки

