

Комплекс псевдомногосеточных подпрограмм для решения краевых и начально-краевых задач механики сплошной среды

**П.Д. Токталиев, С.И. Мартыненко
ФГУП «ЦИАМ имени П.И.Баранова», Москва, Россия**



СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

- основы УМТ
- комплекс многосеточных подпрограмм

2. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

- сглаживатель Ванки
- декомпозиция давления

3. ЗАМЕЧАНИЯ О РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ



ТРУДОЁМКОСТЬ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(a_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_2 \frac{\partial u}{\partial y} \right) + gu = f$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0$$

ТРУДОЁМКОСТЬ

Метод Зейделя $\mathcal{W} = O(N^2)$ а.о.

Метод SOR $\mathcal{W} = O(N^{3/2})$ а.о.

Многосеточный метод $\mathcal{W} = O(N)$ а.о.

Универсальная многосеточная технология $\mathcal{W} = O(N \ln N)$ а.о.

Г.И. Марчук. Методы вычислительной математики. М: Наука, 1989. 608 с.



УНИВЕРСАЛЬНАЯ МНОГОСЕТОЧНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{du}{dx} \right) - g(x) u(x) = -f(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0) = \mu_0, \quad u(1) = \mu_1, \quad \lambda(x) \geq \alpha > 0, \quad g(x) \geq 0$$

Σ -модификация решения $u(x) = c(x) + \hat{u}(x)$

Σ -модифицированная краевая задача

$$\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{dc}{dx} \right) - g(x) c(x) = r(x),$$

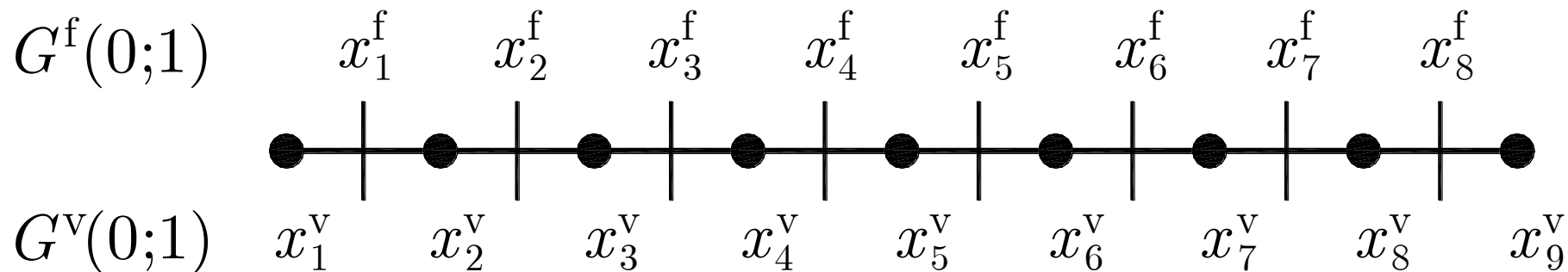
$$c(0) = \mu_0 - \hat{u}(0), \quad c(1) = \mu_1 - \hat{u}(1),$$

где правая часть $r(x)$

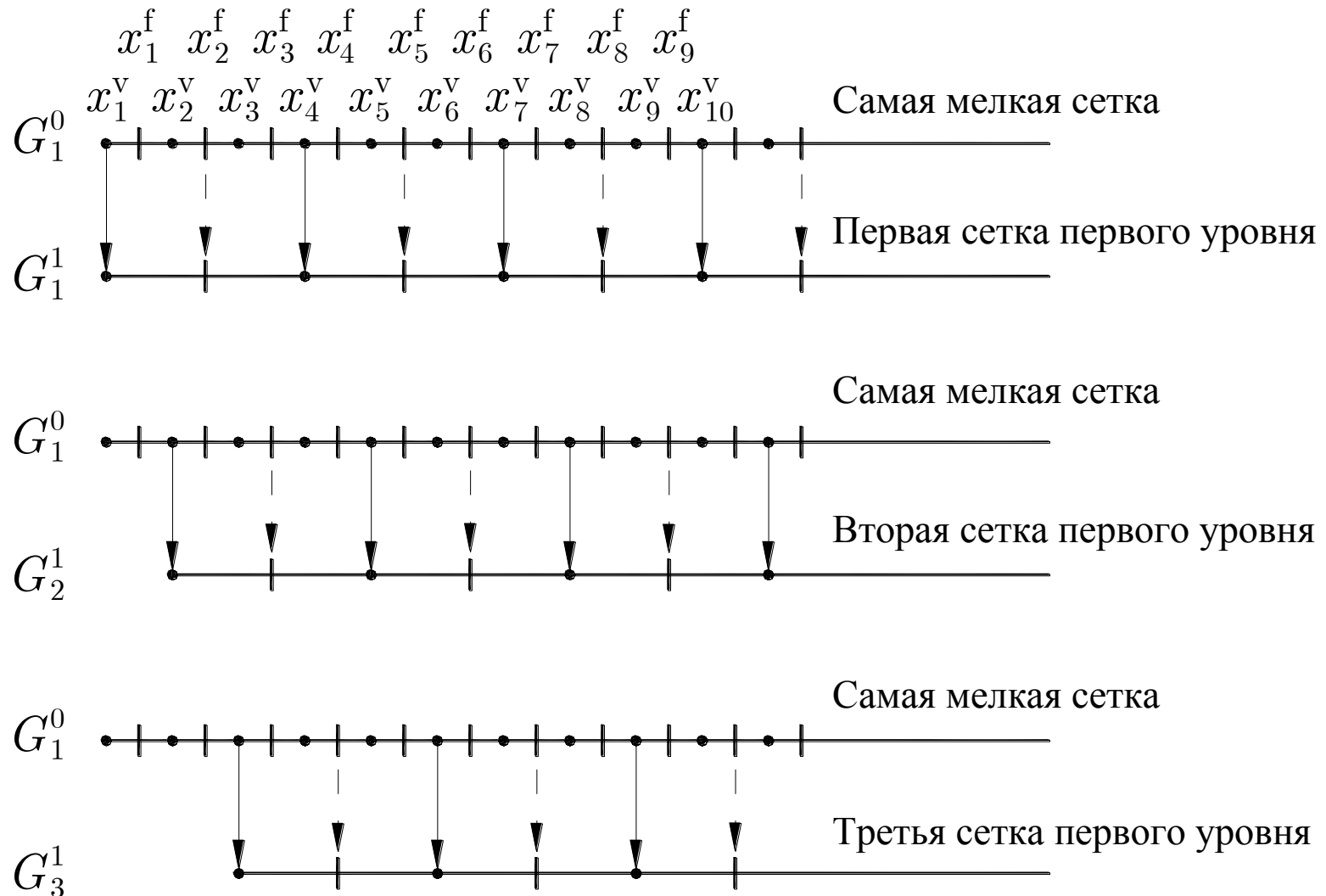
$$r(x) = -\frac{d}{dx} \left(\lambda(x) \frac{d\hat{u}}{dx} \right) + g(x) \hat{u}(x) - f(x)$$



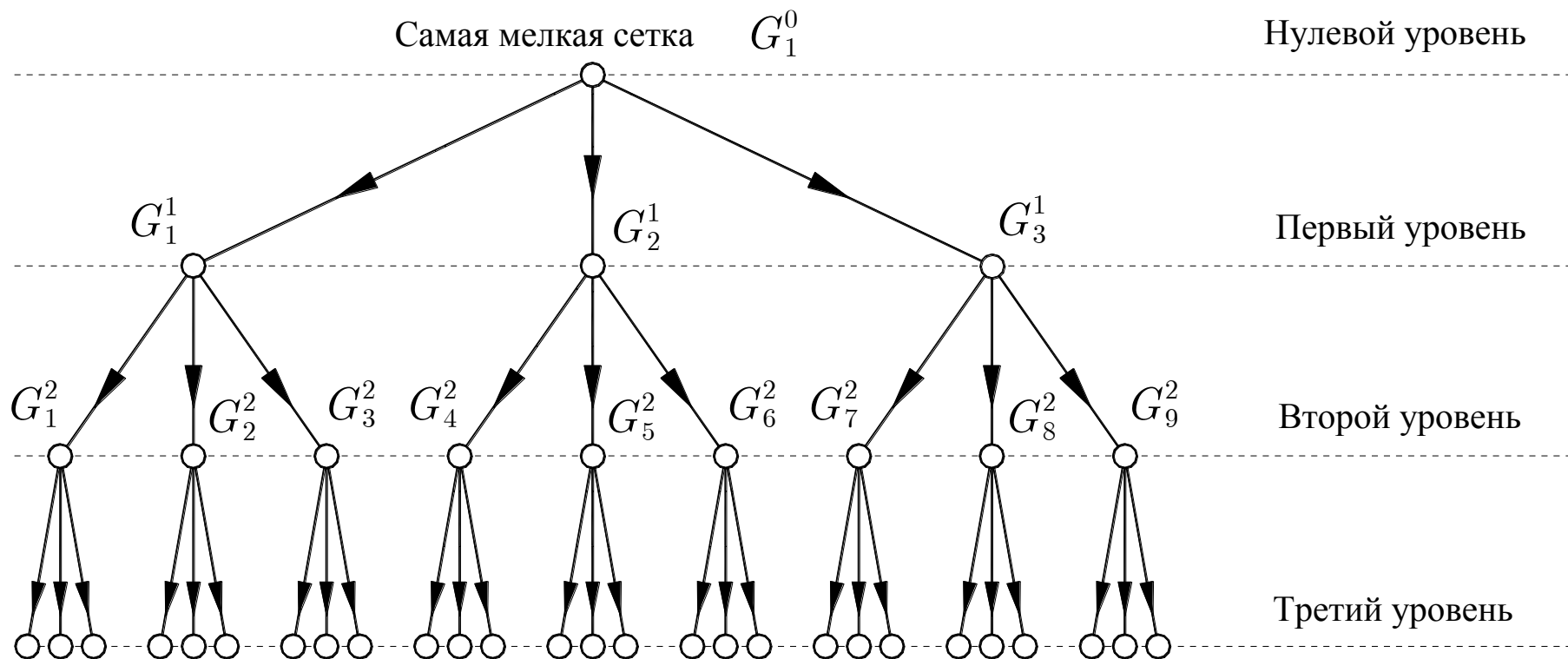
ПОСТРОЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СЕТКИ



ПОСТРОЕНИЕ «ГРУБЫХ» СЕТОК



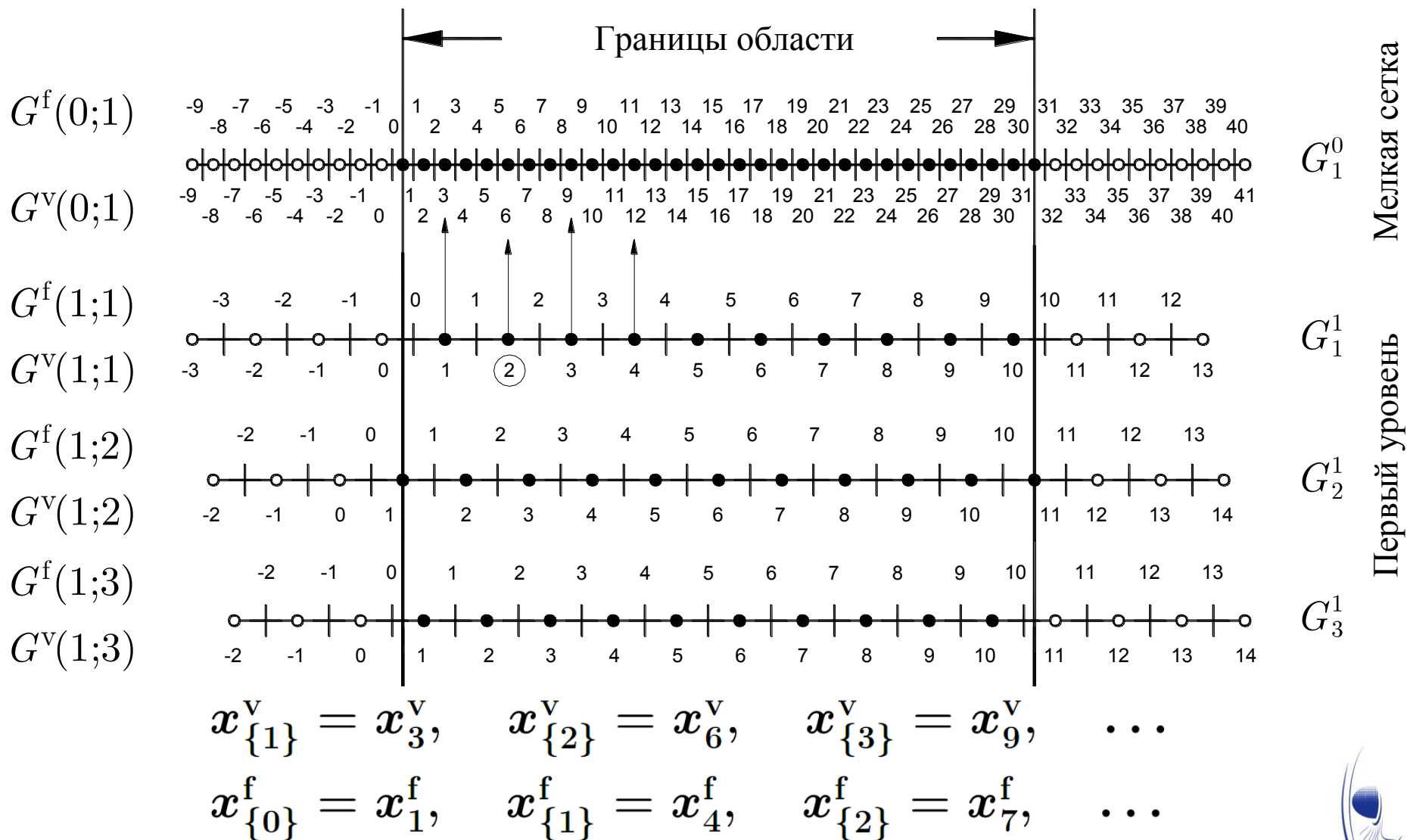
МНОГОСЕТОЧНАЯ СТРУКТУРА



$$L_3^+ = \left\lceil \frac{\lg(N + 1)}{\lg 3} - 1 \right\rceil$$



ОТОБРАЖЕНИЕ ИНДЕКСОВ



АППРОКСИМАЦИЯ НА МНОГОСЕТОЧНОЙ СТРУКТУРЕ

$$\langle \lambda \rangle_{\{i+1\}} \frac{c_{\{i+1\}} - c_{\{i\}}}{h^2 3^{2l}} - \langle \lambda \rangle_{\{i\}} \frac{c_{\{i\}} - c_{\{i-1\}}}{h^2 3^{2l}} - \langle g \rangle_{\{i\}} c_{\{i\}} = \langle r \rangle_{\{i\}}$$

$$\langle \lambda \rangle_{\{i\}} = \left(\frac{1}{h 3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^v}^{x_{\{i\}}^v} \frac{dx}{\lambda(x)} \right)^{-1}$$

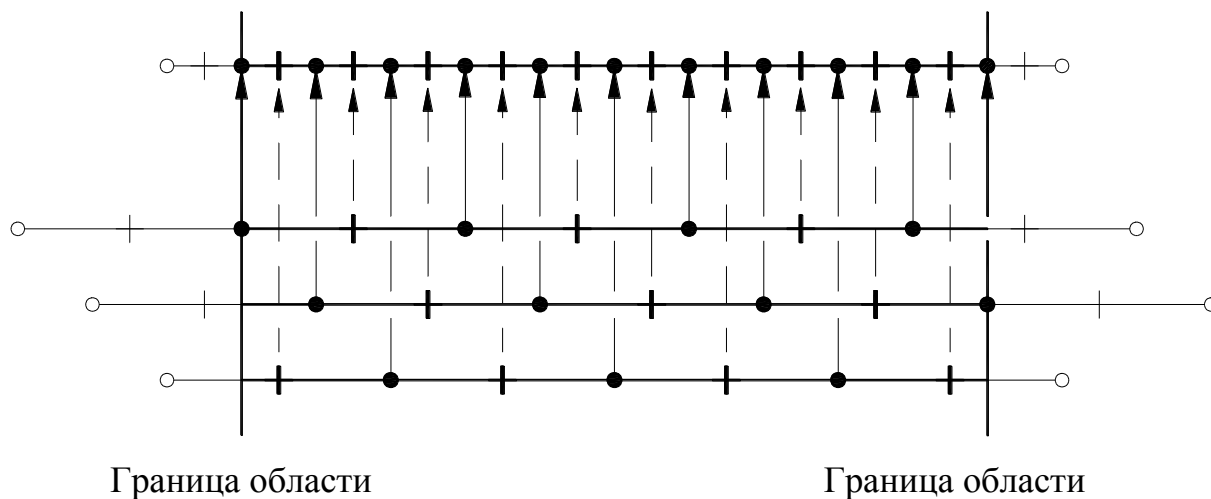
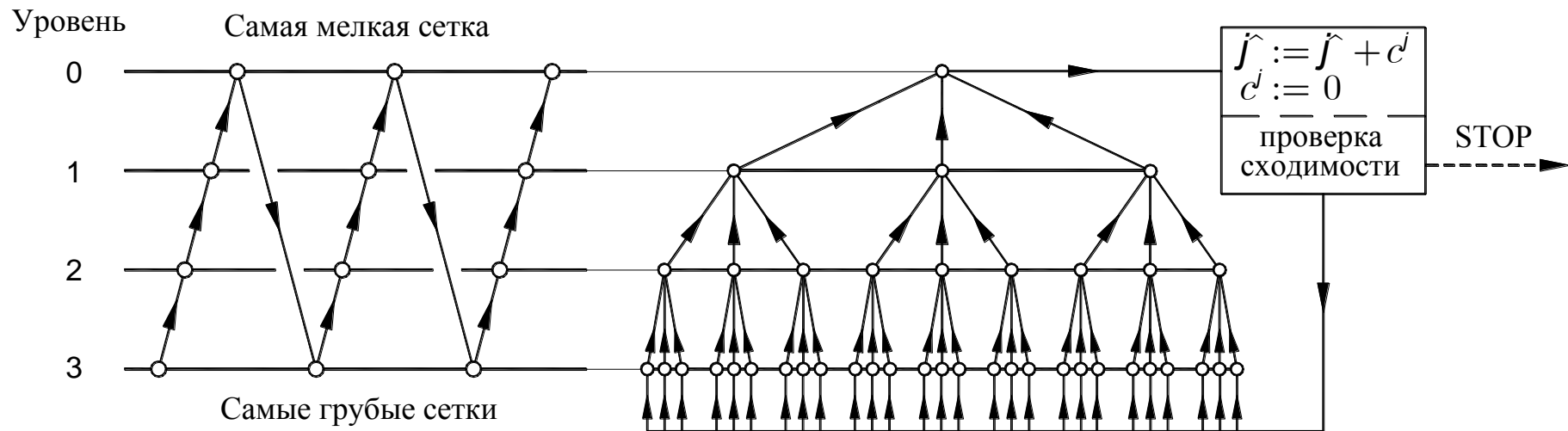
$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h 3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} g(x) dx, \quad \langle r \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h 3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} r(x) dx$$

РЕЗУЛЬТИРУЮЩАЯ СЛАУ

$$A_l c_l^h = \mathcal{R}_{0 \rightarrow l} \left(b - A \hat{u}^h \right)_0$$

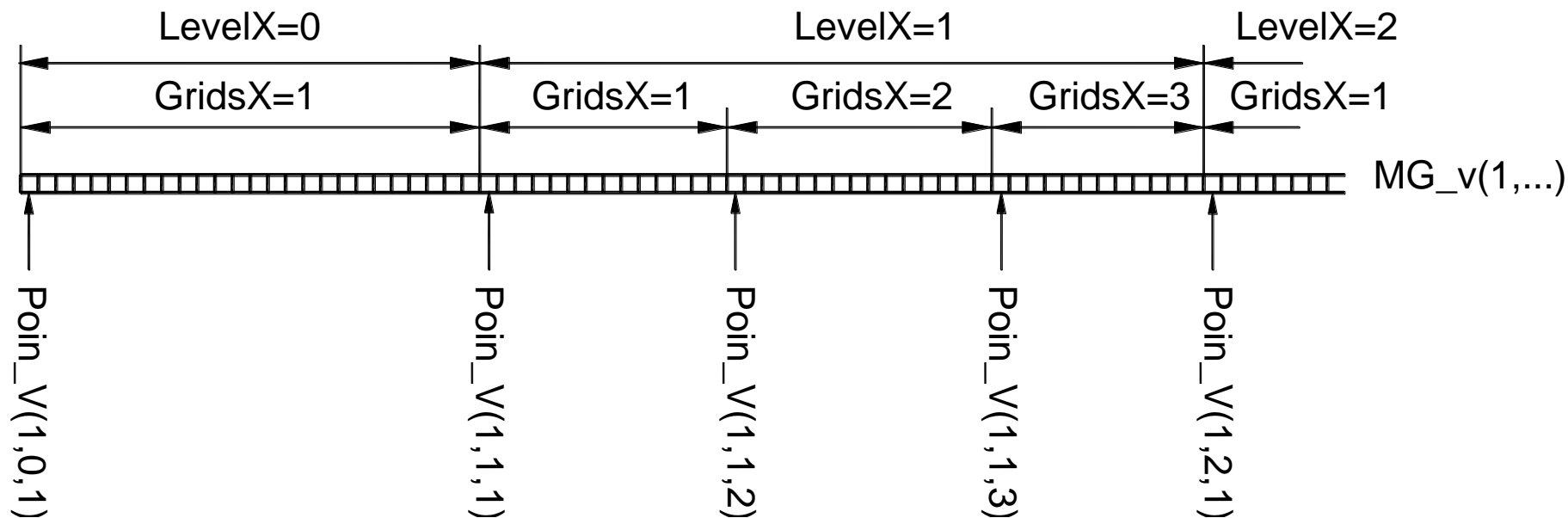


МНОГОСЕТОЧНЫЙ ЦИКЛ

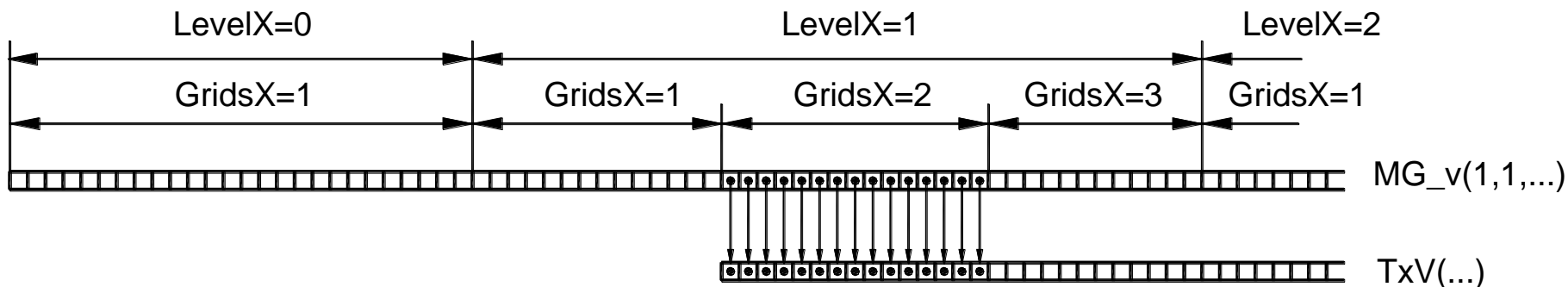


«МНОГОСЕТОЧНОЕ» ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

ПОСТРОЕНИЕ И ХРАНЕНИЕ МНОГОСЕТОЧНОЙ СТРУКТУРЫ



ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ИНДЕКСОВ



ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Обозначение

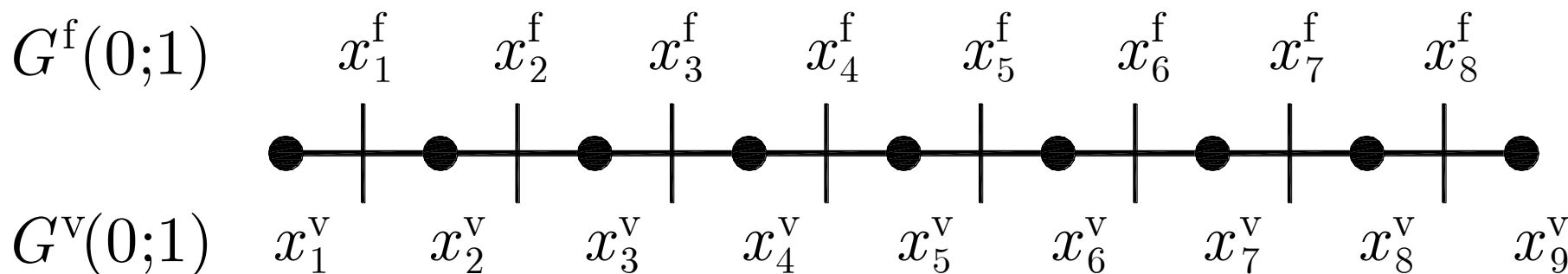
$$U_i$$

Односеточная программа

$$U(i)$$

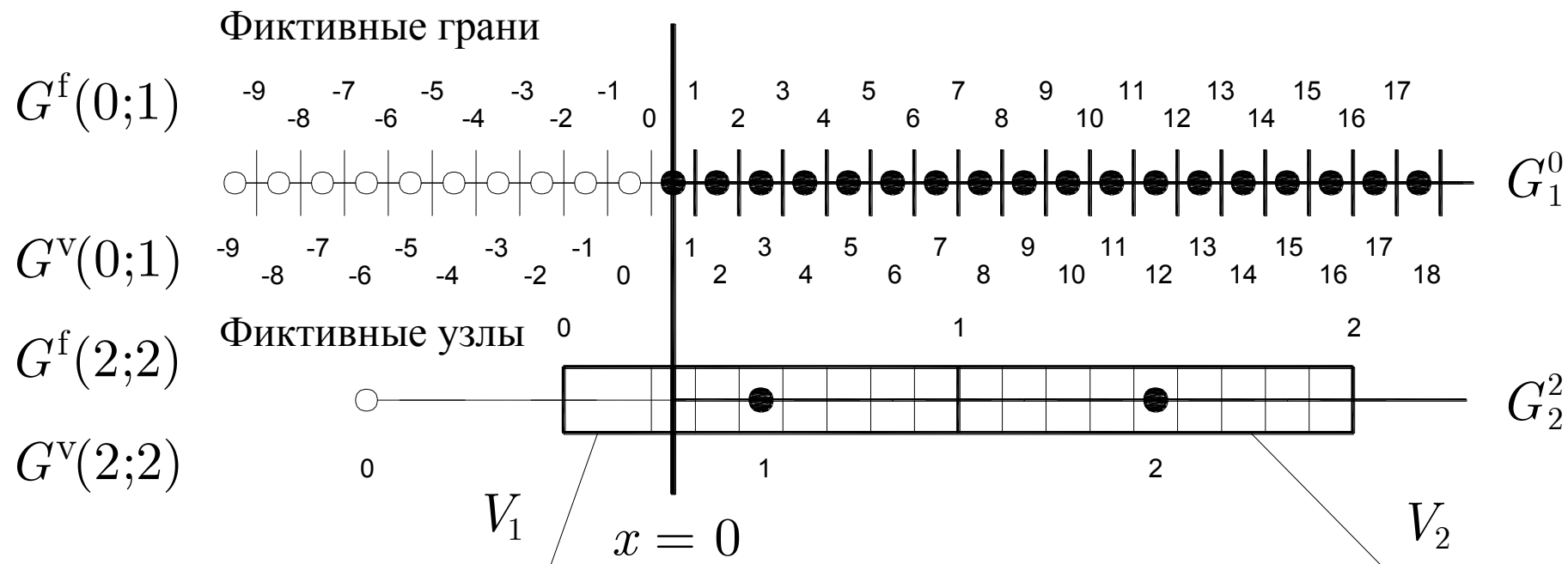
Псевдомногосеточная программа

$$U(TxV(i)) \quad \text{или} \quad U(TxF(i))$$



«МНОГОСЕТОЧНОЕ» ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

АППРОКСИМАЦИЯ ШАБЛОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

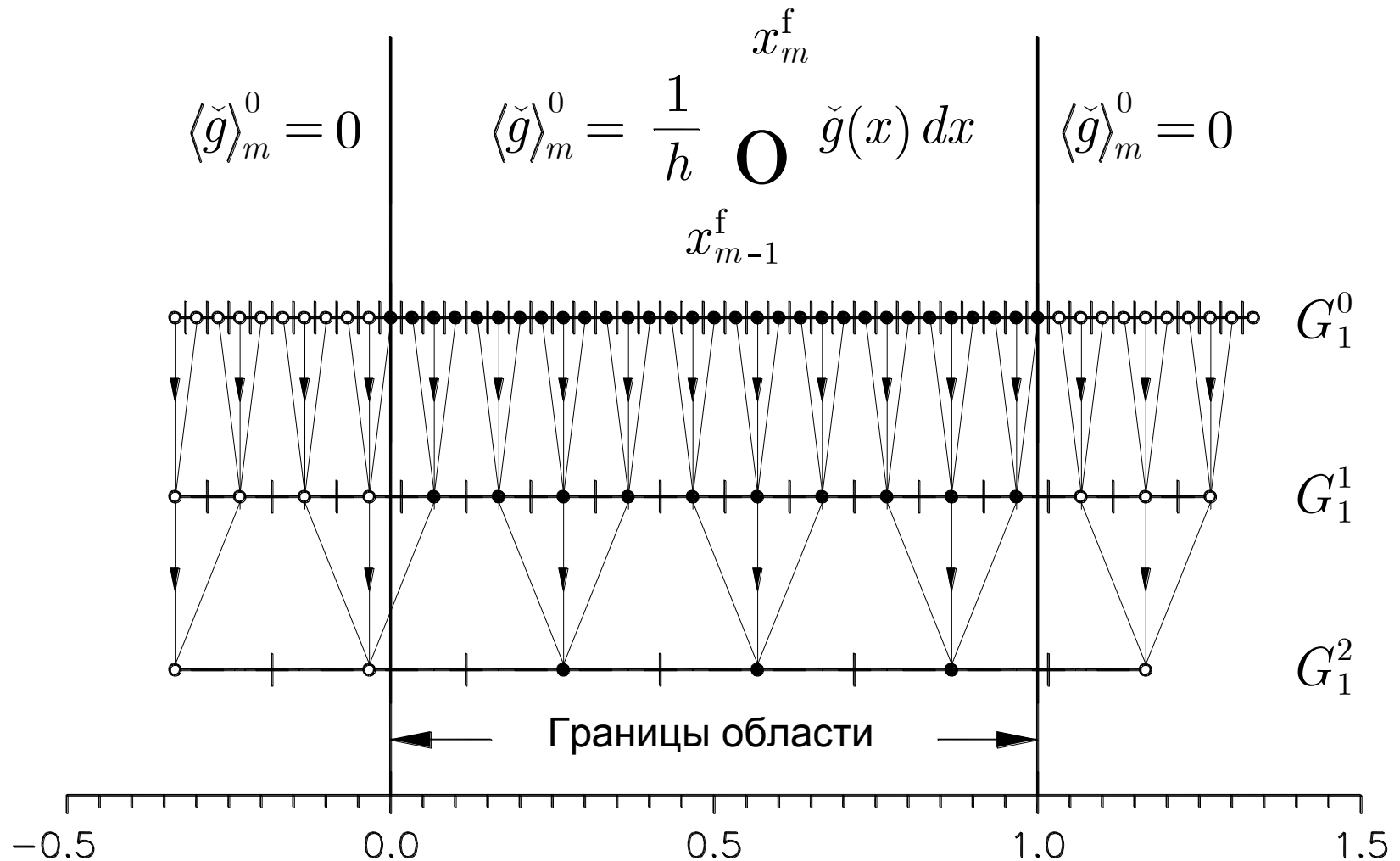


$$\langle g \rangle_{\{i\}} = \frac{1}{h3^l} \int_{x_{\{i-1\}}^f}^{x_{\{i\}}^f} g(x) dx$$



«МНОГОСЕТОЧНОЕ» ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

АППРОКСИМАЦИЯ ШАБЛОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ



ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda^x(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda^y(u) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda^z(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -f$$

где

$$\lambda^x(u) = u^{-a}, \quad \lambda^y(u) = u^{-b}, \quad \lambda^z(u) = u^{-c},$$

где a , b и c суть некоторые положительные константы. Много-сеточные итерации УМТ начнём с нулевого начального приближения $\hat{u}^{(0)} = 0$ и единичного для коэффициентов $(\lambda^x)^{(0)} = (\lambda^y)^{(0)} = (\lambda^z)^{(0)} = 1$, поскольку предполагается, что аналитическая зависимость $\lambda^x(u)$, $\lambda^y(u)$ и $\lambda^z(u)$ неизвестна.

Самая мелкая сетка $101 \times 101 \times 101$ в единичном кубе Ω . Точное решение краевой задачи задано в виде

$$u(x, y, z) = e^{x+y+z}.$$



Сходимость УМТ при решении задачи Дирихле для нелинейного уравнения

блоки	a	b	c	ν	$E^{(q)}$	$\rho^{(q)}$	WU
$1 \times 1 \times 1$	0.25	0.50	0.75	4	$9.00 \cdot 10^{-6}$	0.317	1.44
$1 \times 1 \times 1$	0.25	0.50	0.75	5	$2.83 \cdot 10^{-6}$	0.169	1.77
$1 \times 1 \times 1$	0.25	0.50	0.75	6	$2.40 \cdot 10^{-6}$	0.115	2.01
$3 \times 3 \times 3$	0.25	0.50	0.75	3	$6.01 \cdot 10^{-6}$	0.256	1.55
$3 \times 3 \times 3$	0.25	0.50	0.75	4	$2.27 \cdot 10^{-6}$	0.110	1.80
$3 \times 3 \times 3$	0.25	0.50	0.75	5	$2.14 \cdot 10^{-6}$	0.075	2.06



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. УМТ является односеточным вариантом метода Зейделя и основана на применении основного многосеточного принципа в односеточном алгоритме.

2. Изменяемыми параметрами УМТ являются:

- а) количество сглаживающих итераций;**
- б) упорядочивание неизвестных в блоки (для анизотропных задач);**
- в) параметр нижней релаксации (для нелинейных задач);**
- г) критерий останова многосеточных итераций.**

Количество многосеточных итераций УМТ, необходимых для численного решения краевых и начально-краевых задач, не зависит от количества узлов сетки N , однако вычислительная стоимость каждой многосеточной итерации составляет $O(N \lg N)$ арифметических операций.

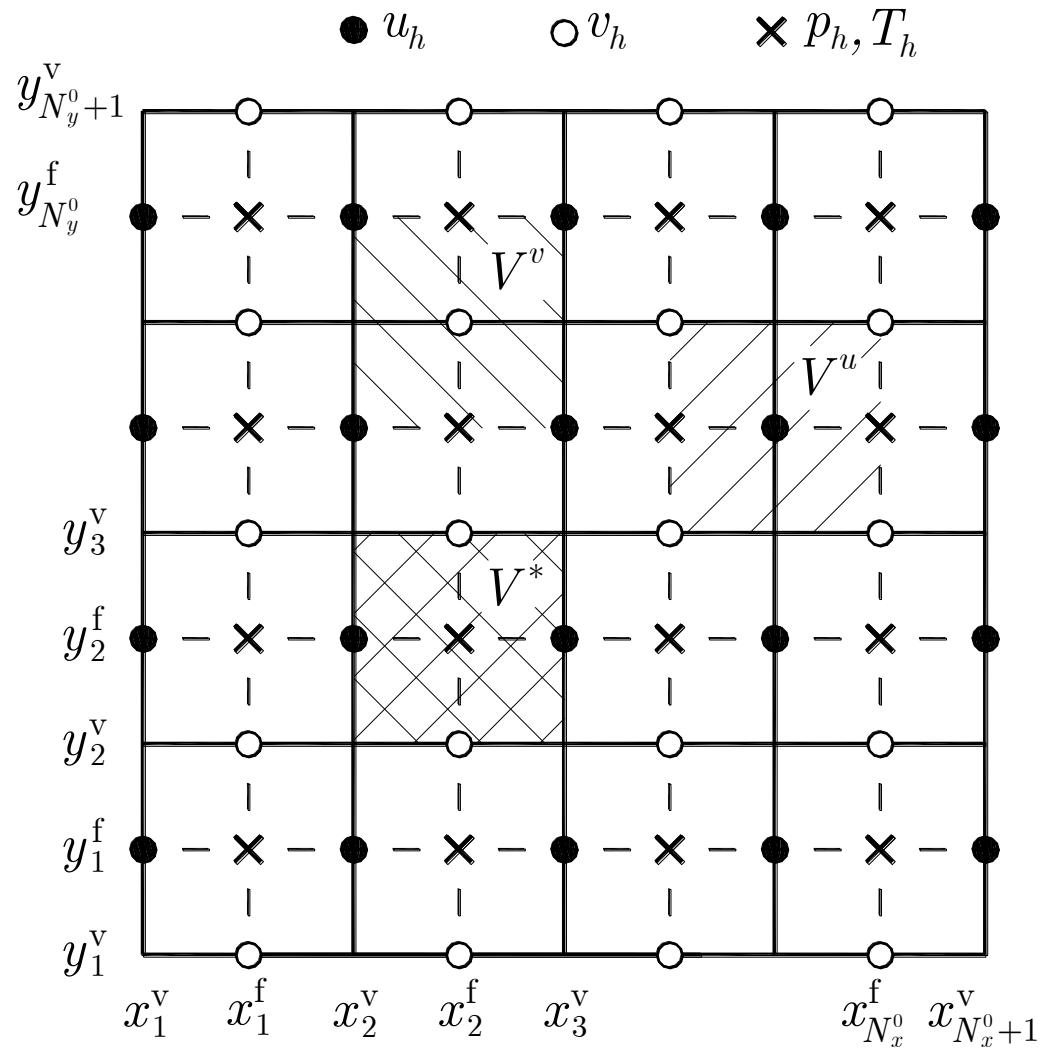
3. Трудоёмкость УМТ лишь близка к оптимальной, проигрыш в объёме вычислений ($\sim \lg N$ арифметических операций) обусловлен минимумом проблемно-независимых компонентов.



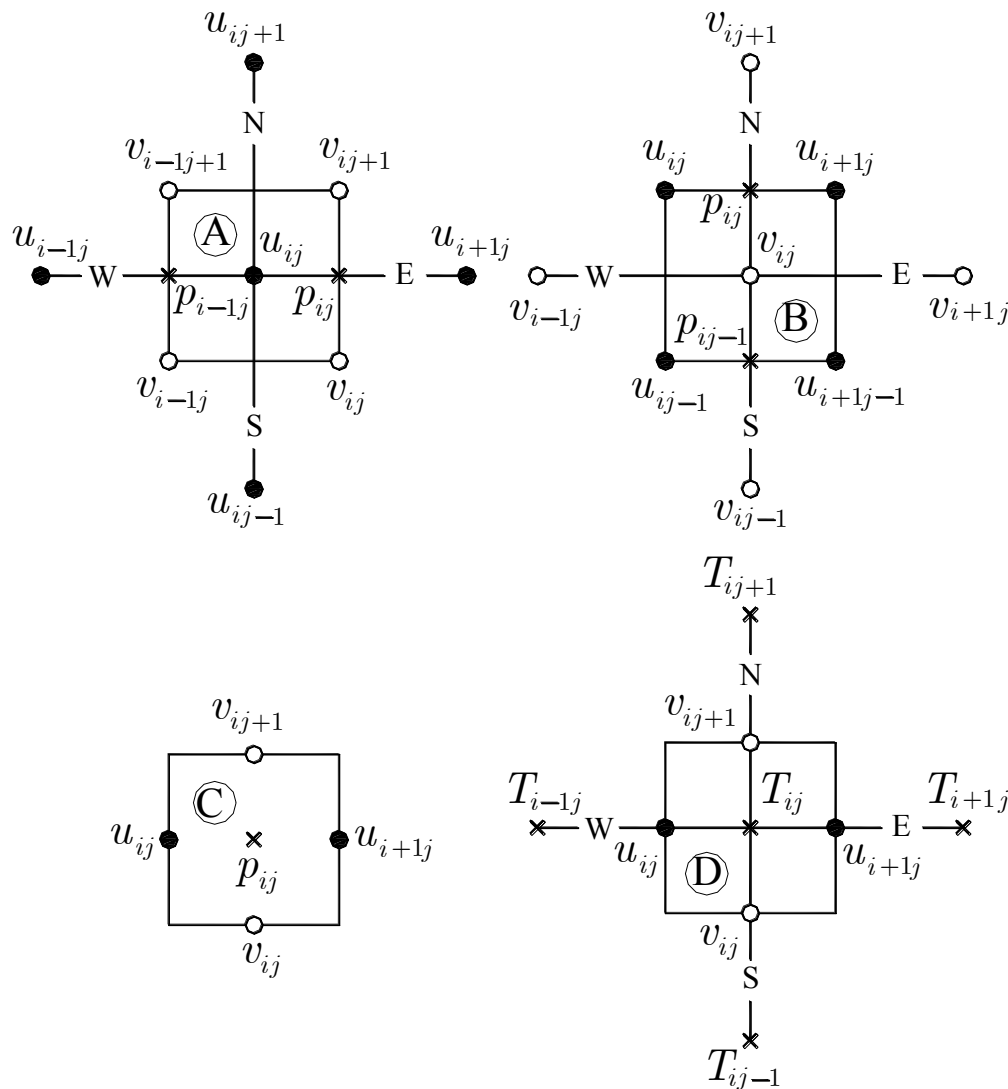
ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА



РАЗНЕСЁННАЯ СЕТКА



КОНТРОЛЬНЫЕ ОБЪЕМЫ ДЛЯ АПРОКСИМАЦИИ УРАВНЕНИЙ N-S



ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА

а) сеточный аналог уравнения неразрывности

$$\frac{u_{i+1j}^{(n+1)} - u_{ij}^{(n+1)}}{h_x} + \frac{v_{ij+1}^{(n+1)} - v_{ij}^{(n+1)}}{h_y} = 0$$

б) линеаризованный сеточный аналог уравнения движения по X

$$\begin{aligned} & U_{ij}^W u_{i-1j}^{(n+1)} + U_{ij}^E u_{i+1j}^{(n+1)} + U_{ij}^S u_{ij-1}^{(n+1)} + U_{ij}^N u_{ij+1}^{(n+1)} + U_{ij}^P u_{ij}^{(n+1)} \\ & + U_{ij}^{WN} v_{i-1j+1}^{(n+1)} + U_{ij}^{EN} v_{ij+1}^{(n+1)} + U_{ij}^{WS} v_{i-1j}^{(n+1)} + U_{ij}^{ES} v_{ij}^{(n+1)} \\ & + \frac{p_{ij}^{(n+1)} - p_{i-1j}^{(n+1)}}{h_x} = S_{ij}^u \end{aligned}$$

в) линеаризованный сеточный аналог уравнения движения по Y

$$\begin{aligned} & V_{ij}^W v_{i-1j}^{(n+1)} + V_{ij}^E v_{i+1j}^{(n+1)} + V_{ij}^S v_{ij-1}^{(n+1)} + V_{ij}^N v_{ij+1}^{(n+1)} + V_{ij}^P v_{ij}^{(n+1)} \\ & + V_{ij}^{WN} u_{ij}^{(n+1)} + V_{ij}^{EN} u_{i+1j}^{(n+1)} + V_{ij}^{WS} u_{ij-1}^{(n+1)} + V_{ij}^{ES} u_{i+1j-1}^{(n+1)} \\ & + \frac{p_{ij}^{(n+1)} - p_{ij-1}^{(n+1)}}{h_y} = S_{ij}^v. \end{aligned}$$



СГЛАЖИВАТЕЛЬ ВАНКИ

Сформируем подвектор (блок) неизвестных

$$\mathbf{v} = \left(u_{ij}^{(\nu+1)}, u_{i+1j}^{(\nu+1)}, v_{ij}^{(\nu+1)}, v_{ij+1}^{(\nu+1)}, p_{ij}^{(\nu+1)} \right)^T$$

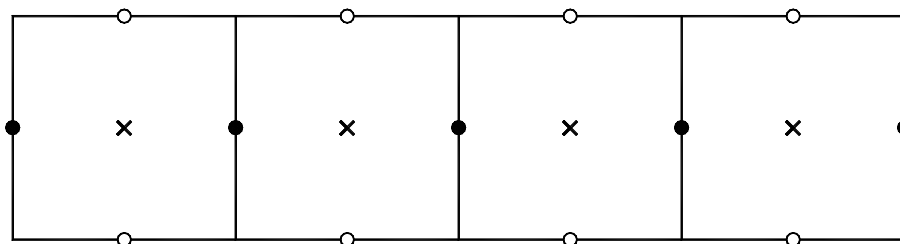
из компонент скорости на гранях контрольного объёма, используемого для аппроксимации уравнения неразрывности

$$\begin{pmatrix} U_{ij}^P & U_{ij}^E & U_{ij}^{ES} & U_{ij}^{EN} & h_x^{-1} \\ U_{i+1j}^W & U_{i+1j}^P & U_{i+1j}^{WS} & U_{i+1j}^{WN} & -h_x^{-1} \\ V_{ij}^{WN} & V_{ij}^{EN} & V_{ij}^P & V_{ij}^N & h_y^{-1} \\ V_{ij+1}^{WS} & V_{ij+1}^{ES} & V_{ij+1}^S & V_{ij+1}^P & -h_y^{-1} \\ -h_x^{-1} & h_x^{-1} & -h_y^{-1} & h_y^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{ij}^{(\nu+1)} \\ u_{i+1j}^{(\nu+1)} \\ v_{ij}^{(\nu+1)} \\ v_{ij+1}^{(\nu+1)} \\ p_{ij}^{(\nu+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$



СГЛАЖИВАТЕЛЬ ВАНКИ

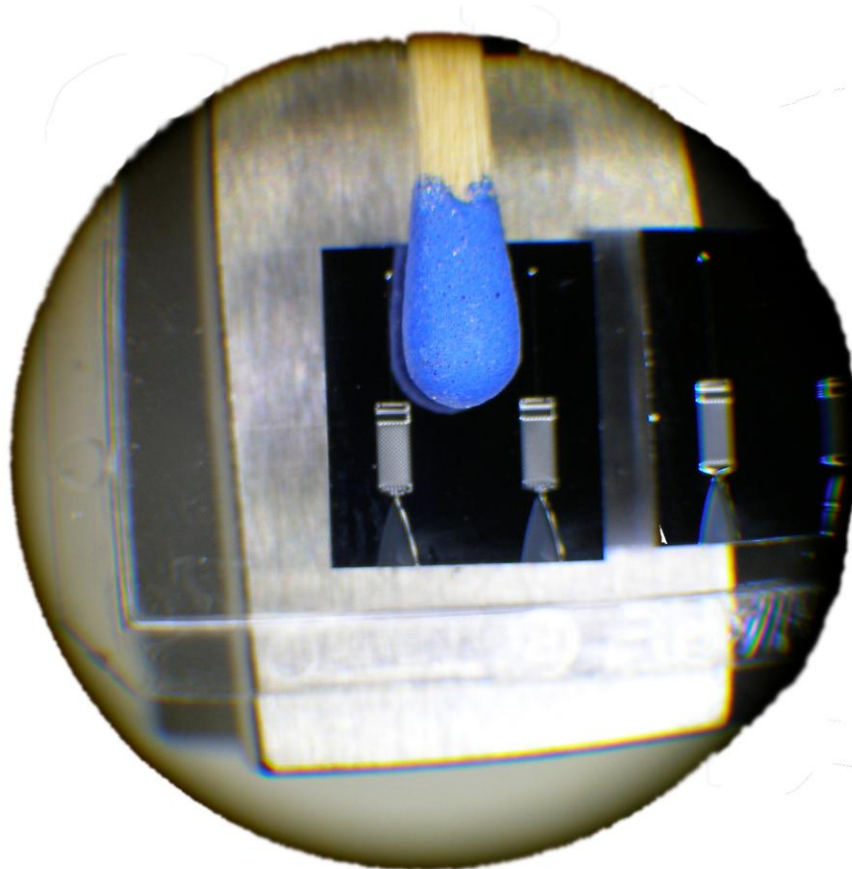
1. Сглаживатель Ванки является вариантом метода Зейделя со специальным упорядочением неизвестных
2. Системы ДУЧП всегда решают совместно, применение сглаживателя Ванки к решению уравнений Навье-Стокса не требует надуманных уравнений для вычисления давления и надуманных граничных условий к нему
3. Возможно формирование СЛАУ при использовании группы контрольных объёмов



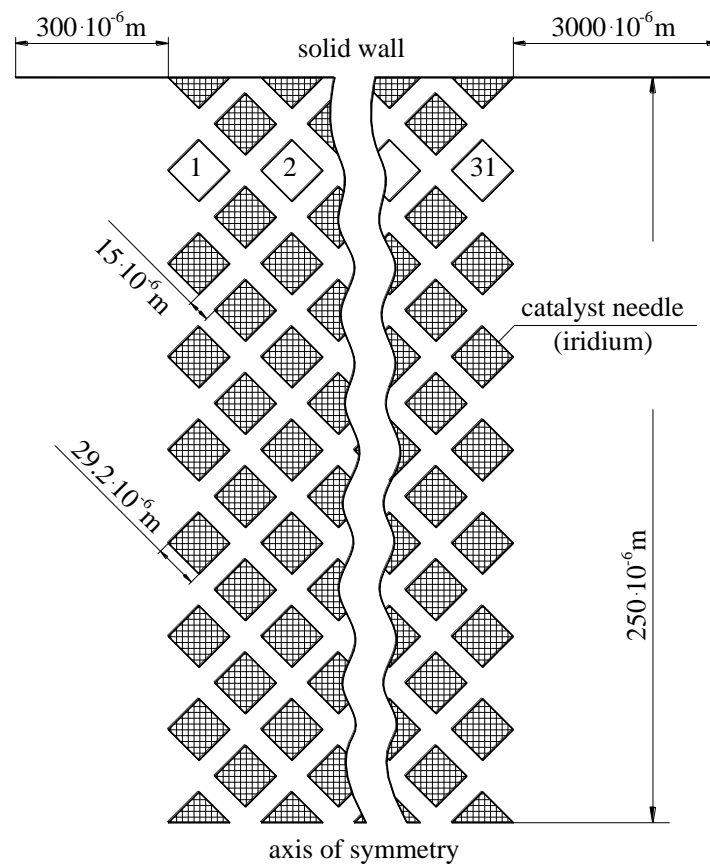
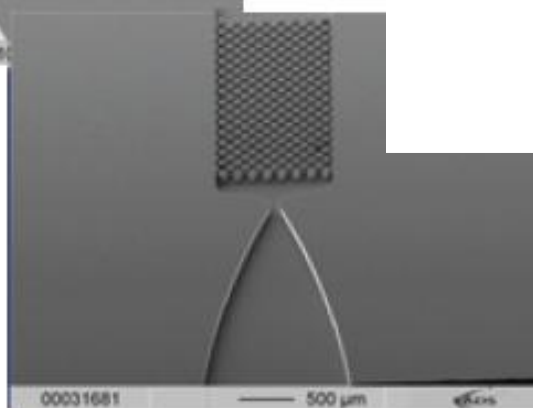
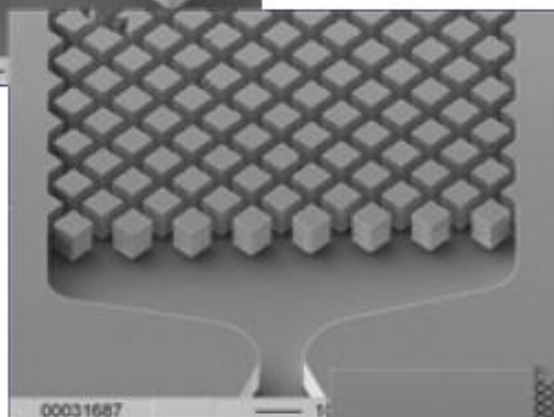
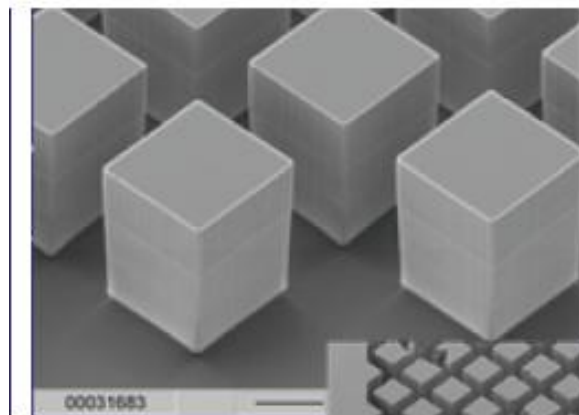
4. Скорость сходимости сглаживателя Ванки невелика, сходимость не доказана
5. Сглаживатель Ванки применим к решению небольших СЛАУ
6. Считается лучшим сглаживателем для многосеточных методов



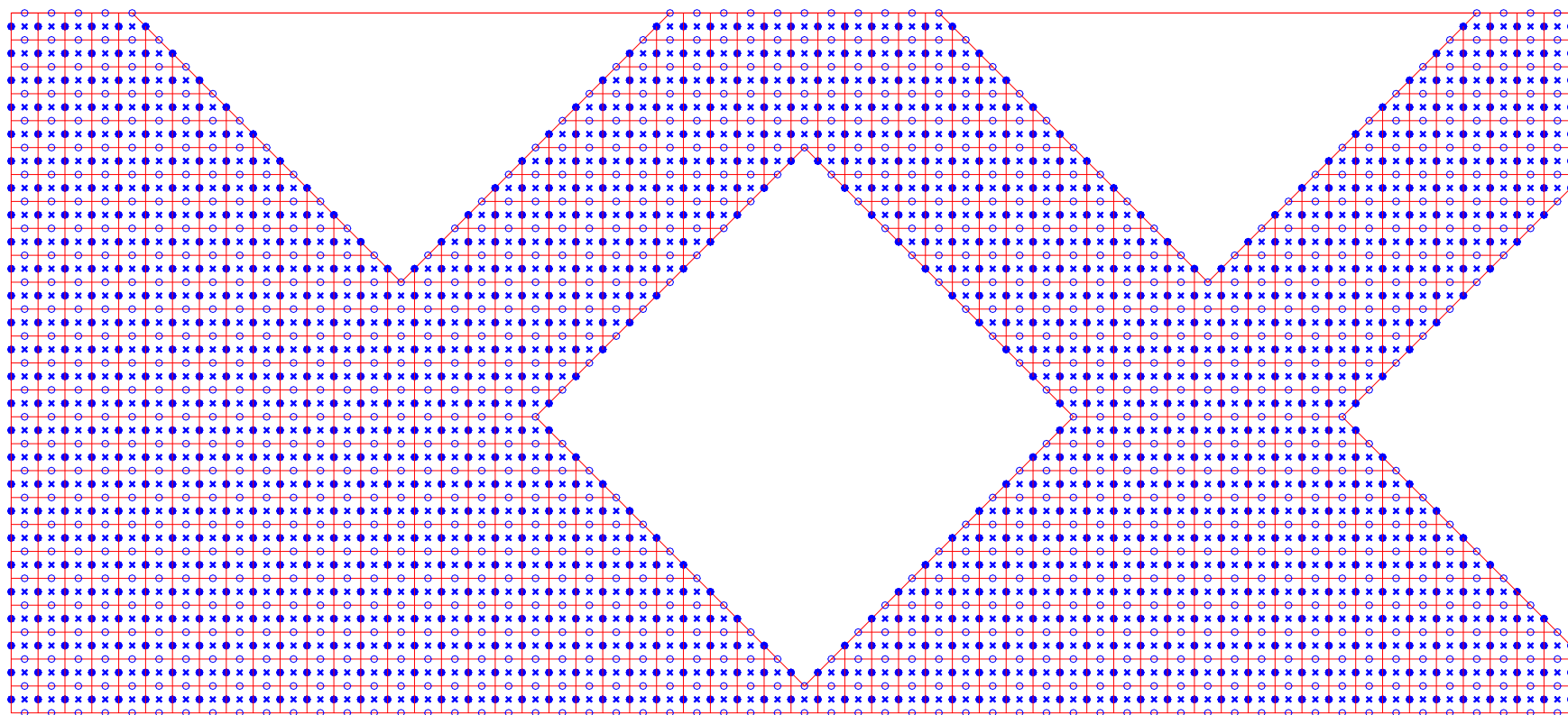
МИКРОДВИГАТЕЛЬ



КАТАЛИЗАТОР МИКРОДВИГАТЕЛЯ



РАЗНЕСЁННАЯ СЕТКА В КАТАЛИЗАТОРЕ МИКРОДВИГАТЕЛЯ (385×3150)



Σ-МОДИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Уравнения Навье-Стокса в операторной форме

$$\mathcal{N}(S) = f$$

Σ-модификация решения $S = c + \hat{S}$

Σ-модификация уравнений Навье-Стокса

$$\mathcal{N}(S) = \mathcal{N}(c + \hat{S}) = \mathcal{N}^*(c) + \mathcal{N}(\hat{S})$$

Уравнения Навье-Стокса в Σ-операторной форме

$$\mathcal{N}^*(c) = f - \mathcal{N}(\hat{S})$$



МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

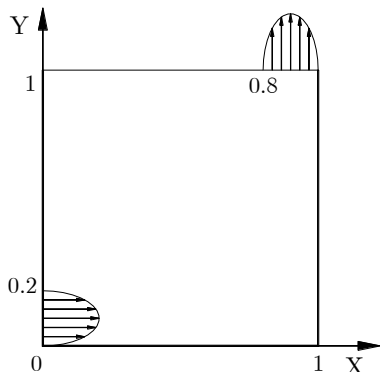
Граничные условия для компонент скорости заданы в виде

$$u(0, y) = \begin{cases} 100y(0.2 - y), & \text{при } y \leq 0.2, \\ 0, & \text{при } y > 0.2, \end{cases}$$

$$u(1, y) = u(x, 0) = u(x, 1) = 0,$$

$$v(x, 1) = \begin{cases} 100(x - 0.8)(1 - x), & \text{при } x \geq 0.8, \\ 0, & \text{при } x < 0.8, \end{cases}$$

$$v(0, y) = v(1, y) = v(x, 0) = 0.$$



сетка	Re	ν	q	$\rho_{MG}^{(q)}$
101 × 101	100 (500)	4	5	0.132 (0.167)
1001 × 1001	100 (500)	4	5	0.151 (0.194)



ДЕКОМПОЗИЦИЯ ДАВЛЕНИЯ

Преобразуем давление, добавляя и вычитая слагаемые, каждое из которых зависит только от одной пространственной координаты

$$p(t, x, y, z) = p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) + (-p^x(t, x) - p^y(t, y) - p^z(t, z) + p(t, x, y, z)),$$

где верхние индексы x , y и z показывают зависимость того или иного слагаемого от пространственных координат. Введём обозначение

$$p^{xyz}(t, x, y, z) = -p^x(t, x) - p^y(t, y) - p^z(t, z) + p(t, x, y, z)$$

Тогда давление представимо в виде

$$p(t, x, y, z) = p^x(t, x) + p^y(t, y) + p^z(t, z) + p^{xyz}(t, x, y, z)$$



МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА (вспомогательная задача)

а) уравнение движения по X и уравнение постоянства расхода

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} &= -\frac{dp^x}{dx} - \left[\frac{\partial p^{xy}}{\partial x} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \int_0^1 u(x, y) dy &= \int_0^1 u(0, y) dy - \int_0^x v(\xi, 1) d\xi \end{aligned} \right.$$

б) уравнение движения по Y и уравнение постоянства расхода

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} &= -\frac{dp^y}{dy} - \left[\frac{\partial p^{xy}}{\partial y} \right] + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \int_0^1 v(x, y) dx &= \int_0^y u(0, \xi) d\xi \end{aligned} \right.$$

где фигурные скобки означают, что уравнения движения решают согласованно с соответствующими уравнениями постоянств расхода.



МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА (основная задача)

а) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

б) уравнение движения по X

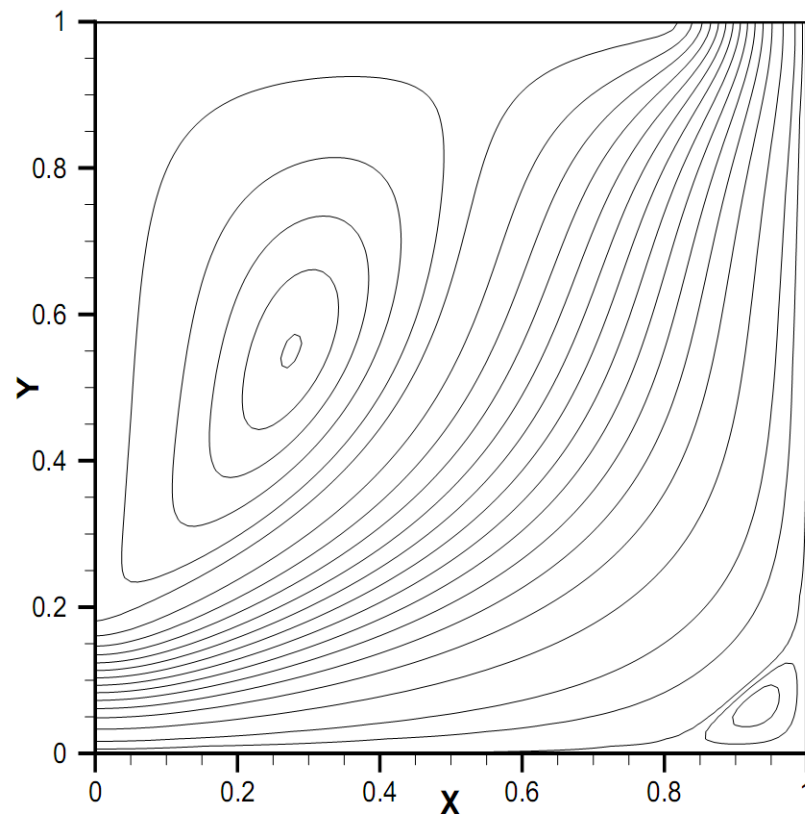
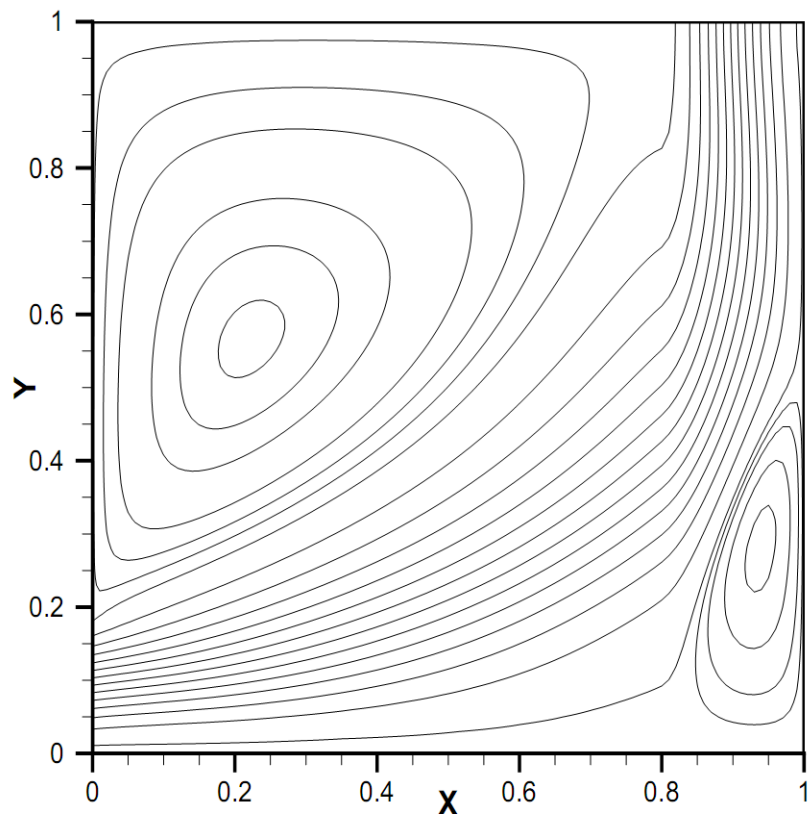
$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} = - \left[\frac{dp^x}{dx} \right] - \frac{\partial p^{xy}}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

в) уравнение движения по Y

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = - \left[\frac{dp^y}{dy} \right] - \frac{\partial p^{xy}}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$



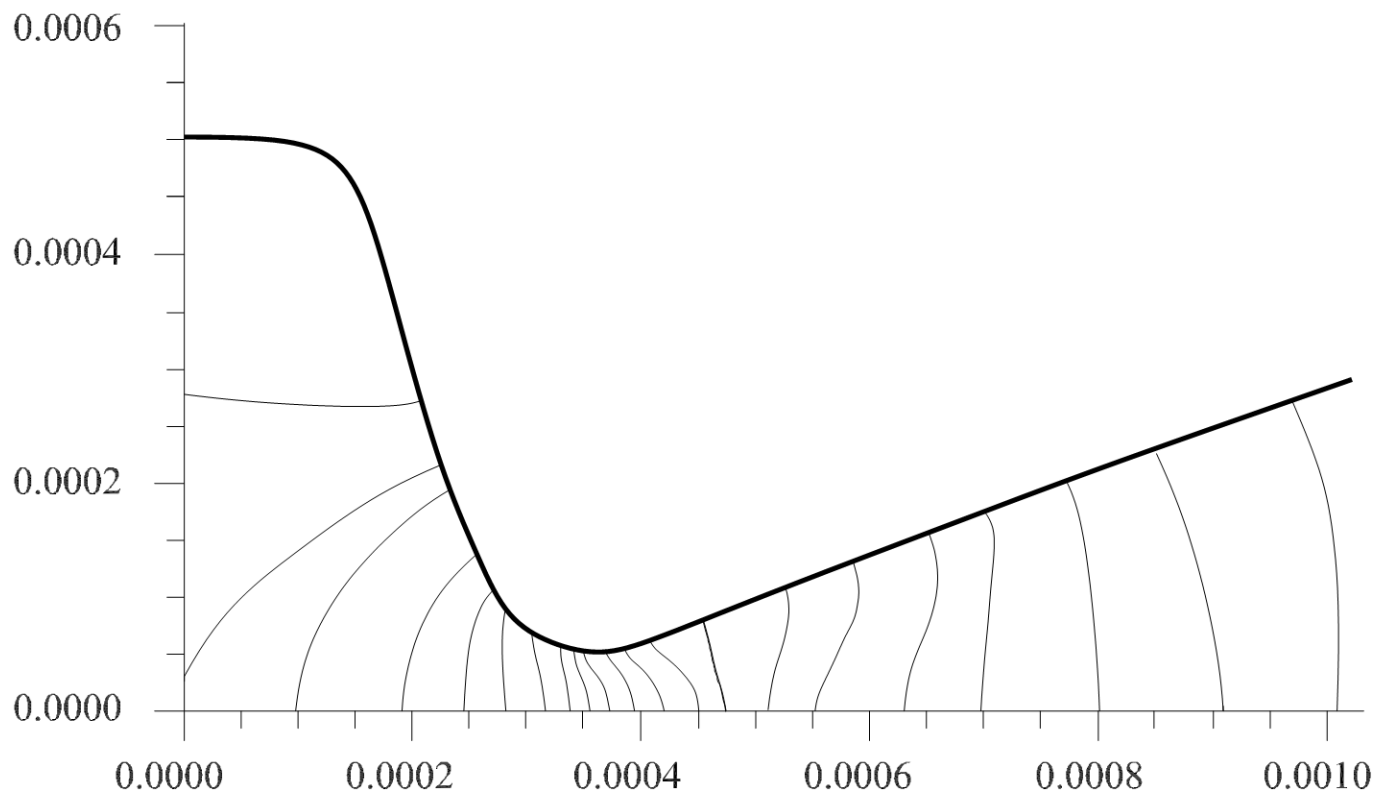
МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА



Изолинии функции тока:
решение вспомогательной (слева) и основной (справа) задач при $Re = 100$



ИЗОБАРЫ В ПЛОСКОМ МИКРОСОПЛЕ ЛАВАЛЯ



ПРИНЦИП ФОРМАЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ ДАВЛЕНИЯ НАИБОЛЕЕ ЭФФЕКТИВЕН ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ С ВЫДЕЛЕННЫМ НАПРАВЛЕНИЕМ ДВИЖЕНИЯ СРЕДЫ



ЗАМЕЧАНИЯ О РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ ВЫЧИСЛЕНИЙ



МЕРЫ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

Определение 1. Ускорением (\bar{S}) и эффективностью (\bar{E}) параллельного алгоритма называется величина

$$\bar{S} = p\bar{E} = \frac{T(1)}{T(p)},$$

где $T(1)$ есть время выполнения алгоритма на одном процессоре, а $T(p)$ – время выполнения параллельного алгоритма на системе из p процессоров.

$$T(p) = \frac{1}{p}T(1) + T^* \Rightarrow \bar{S} = p\bar{E} = \frac{T(1)}{\frac{1}{p}T(1) + T^*}$$

при $T^* \rightarrow 0 \Rightarrow \bar{E} \rightarrow 1$ независимо от p



МЕРЫ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

Определение 2. Ускорением (\tilde{S}) и эффективностью ($\tilde{\xi}$) параллельного алгоритма по отношению к наилучшему последовательному алгоритму называется величина

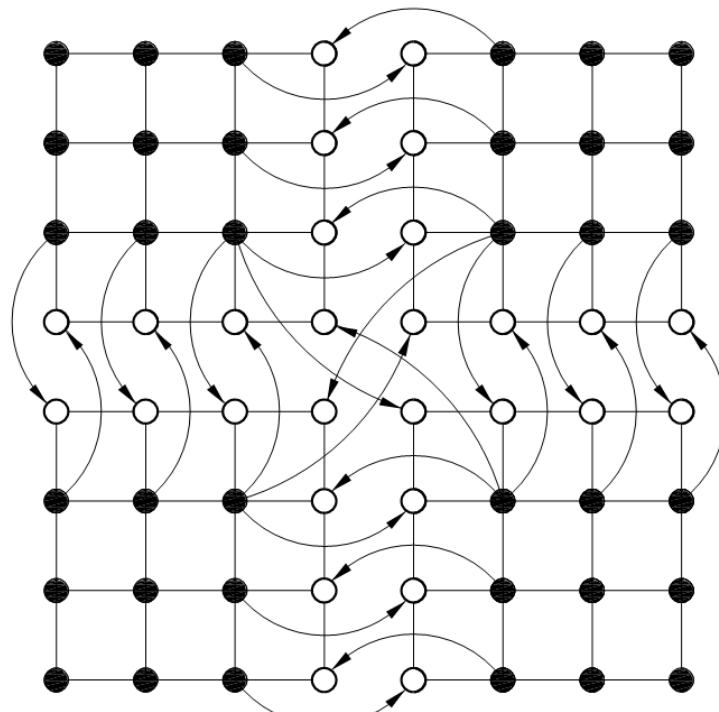
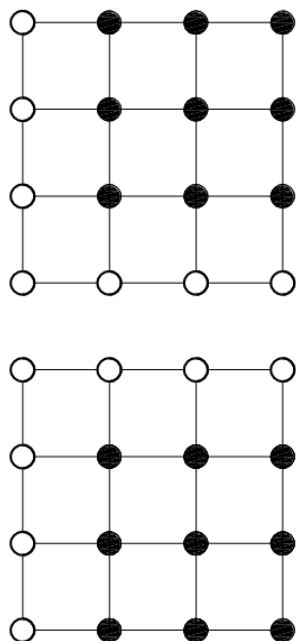
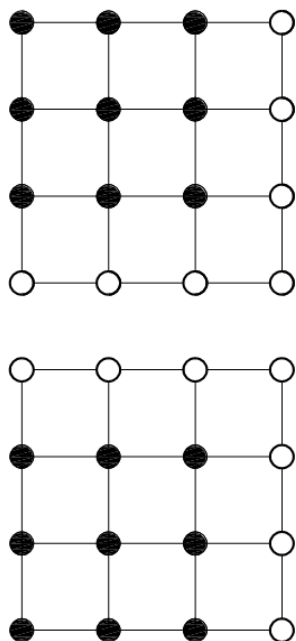
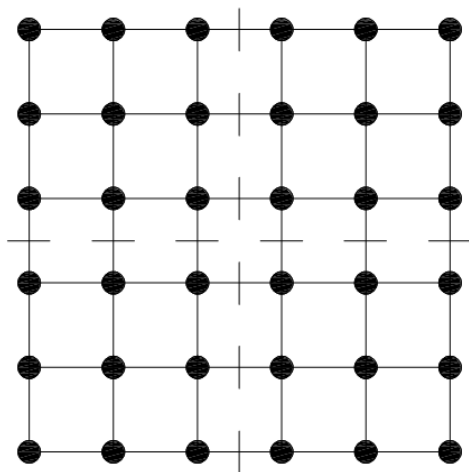
$$\tilde{S} = p\tilde{\xi} = \frac{T(1)}{T(p)},$$

где $T(1)$ есть время выполнения быстреего последовательного алгоритма на одном процессоре, а $T(p)$ – время выполнения

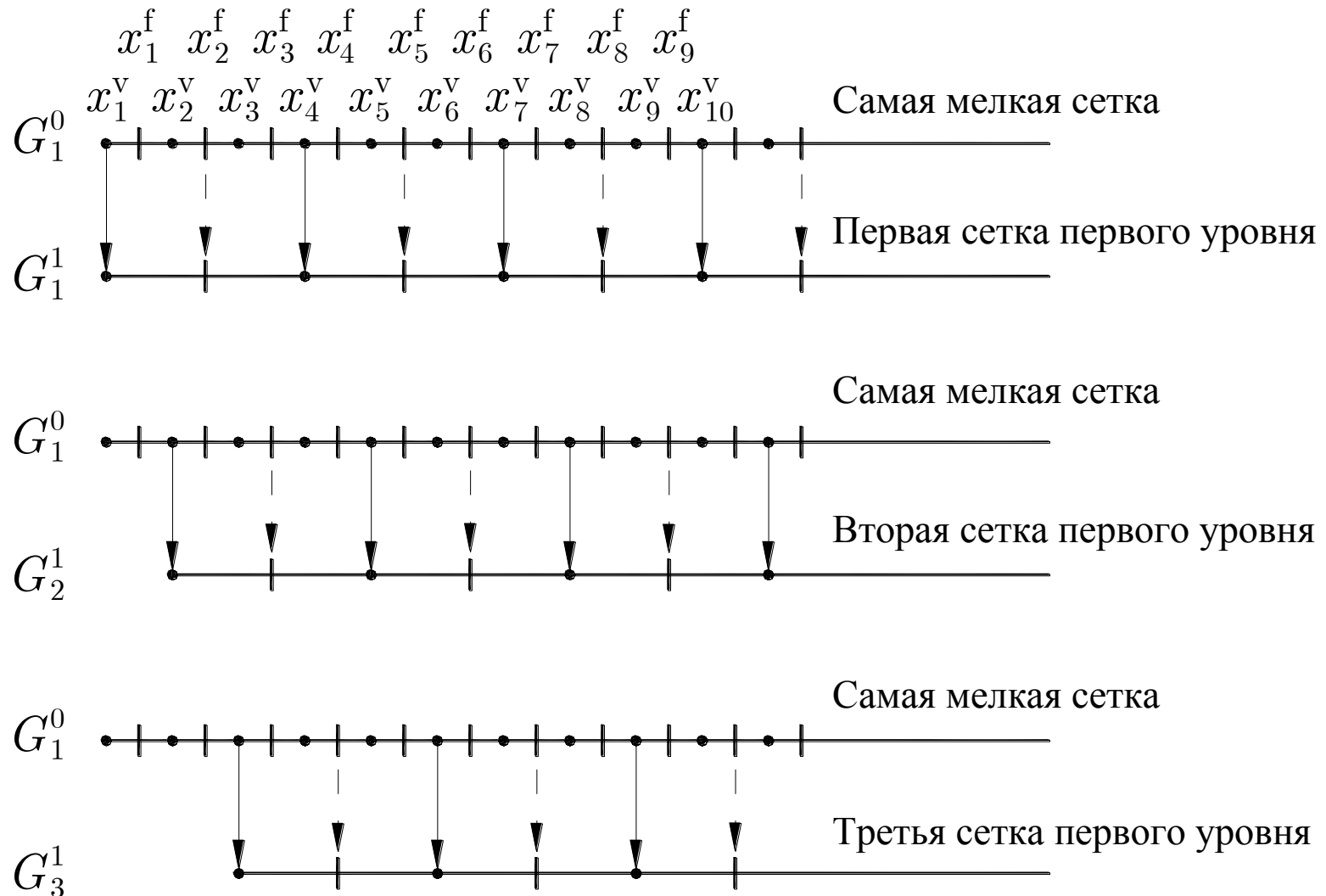
$$\left. \begin{array}{l} T(1) = C_1 N \\ T(p) = \frac{1}{p} C_p N \ln N + T^* \end{array} \right\} \Rightarrow \tilde{S} = p\tilde{\xi} = \frac{C_1 N}{\frac{1}{p} C_p N \ln N + T^*}$$

при $T^* \rightarrow 0 \Rightarrow \tilde{\xi} = O(1/\ln N)$ независимо от p

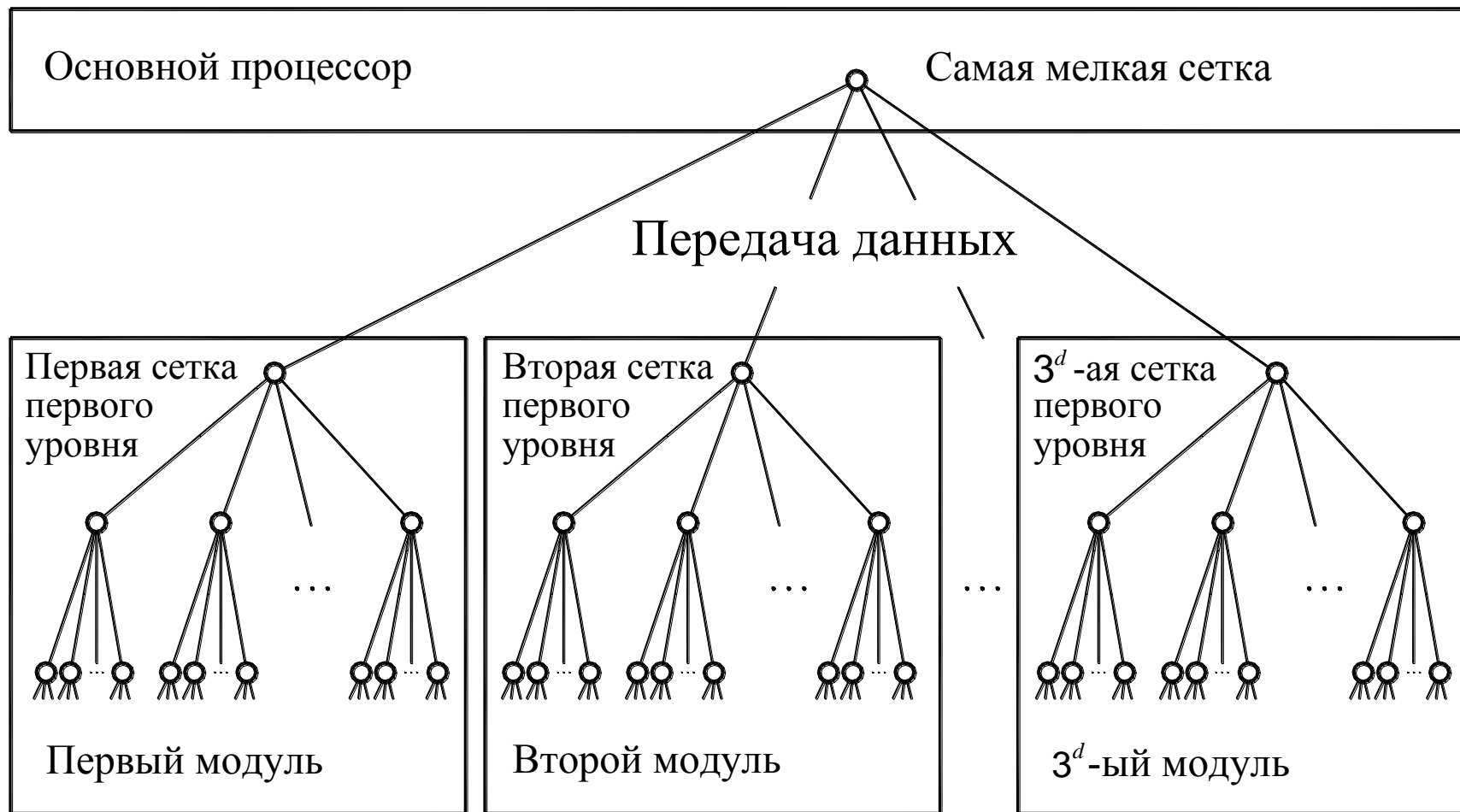
АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД



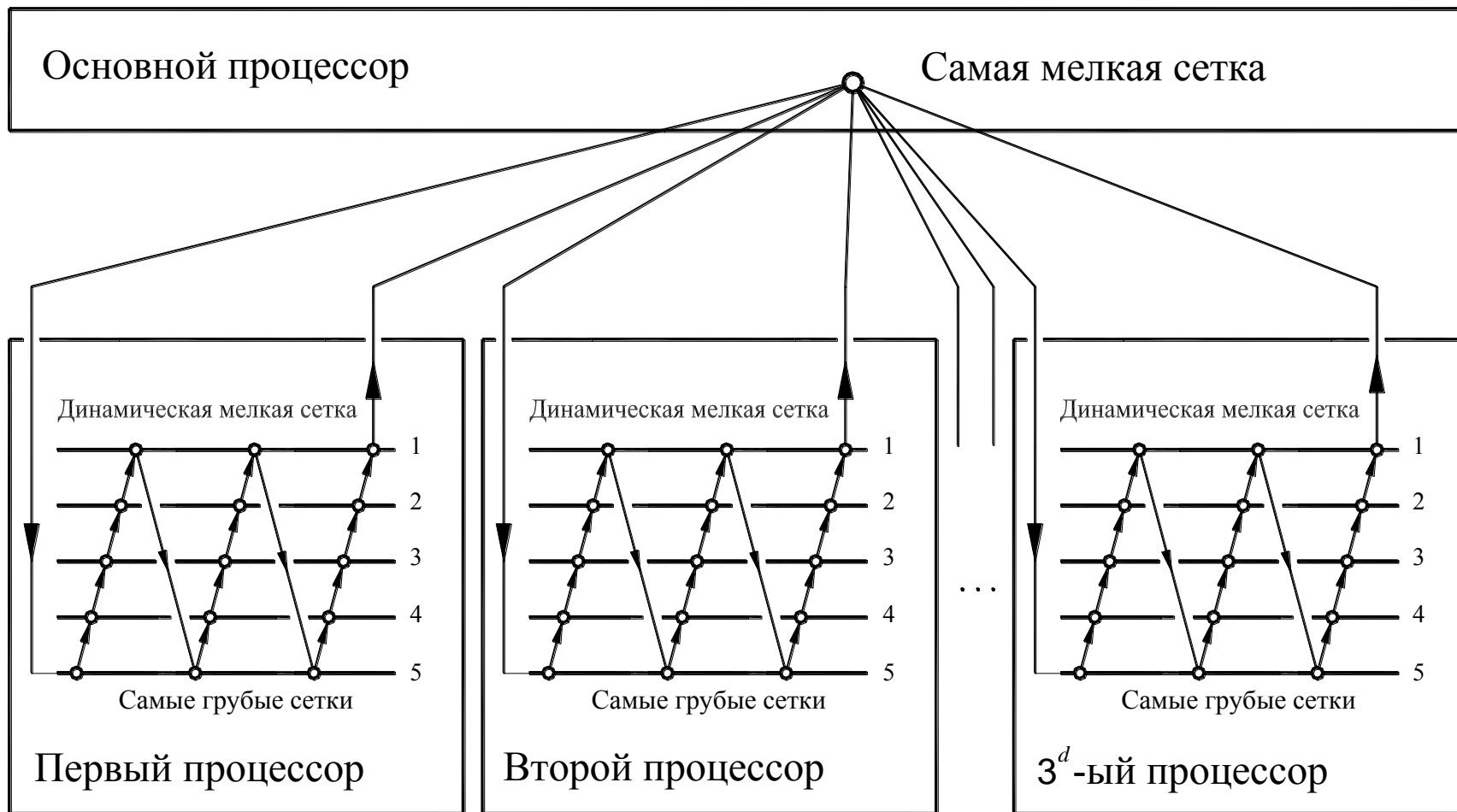
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД



ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Краевые и начально-краевые задачи, которые мы в принципе умеем решать, могут быть решены методом Зейделя с вычислительными усилиями близкими к оптимальным.

НЕРЕШЁННЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Обобщение на неструктурированные сетки

