

Пакет EWT-ЦАГИ.  
Модели турбулентности класса DRSM

А. И. Трошин, ЦАГИ

# План доклада

## 1. Введение

- Коллектив, задачи
- Возможности пакета EWT-ЦАГИ

## 2. Дифференциальные модели для напряжений Рейнольдса (DRSM)

- Преимущества перед моделями, основанными на гипотезе Буссинеска
- Задачи, в которых ожидается уточнение результатов
- Реализованные стандартные модели класса DRSM: Stress- $\omega$ , SSG/LRR- $\omega$
- Особенности численного метода

## 3. Настройка модели турбулентности SSG/LRR- $\omega$ на задачи истечения струй

- Калибровка коэффициентов
- Модификация уравнения для характерной частоты турбулентности  $\omega$
- Поправка на осесимметричность

## 4. Тестовые расчеты

- Плоская дозвуковая затопленная струя
- Круглая дозвуковая затопленная струя
- Круглая сверхзвуковая затопленная струя NPR=2.8
- Круглая сверхзвуковая затопленная струя NPR=5.0

## 5. Заключение

- Дальнейшие действия
- Выводы

## Коллектив

### ЦАГИ

Отделение Силовых Установок  
Отдел CFD (Босняков С.М.)



### МФТИ, ФАЛТ

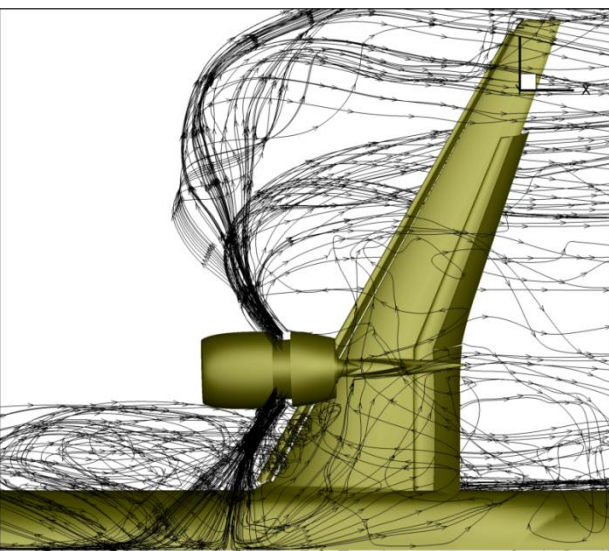
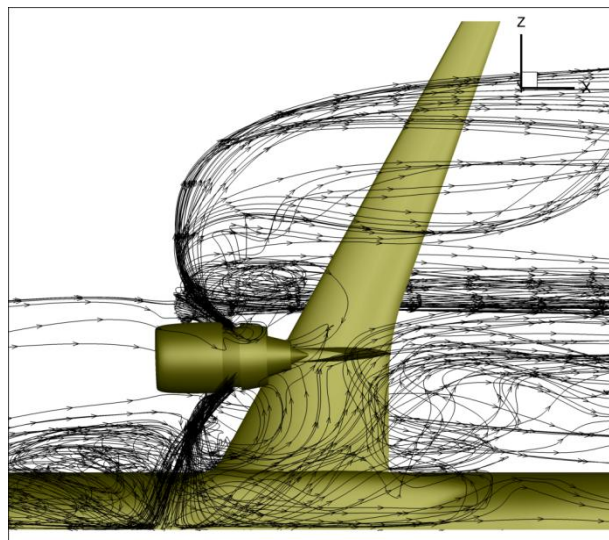
Кафедра КМ (Босняков С.М.)  
Кафедра информатики



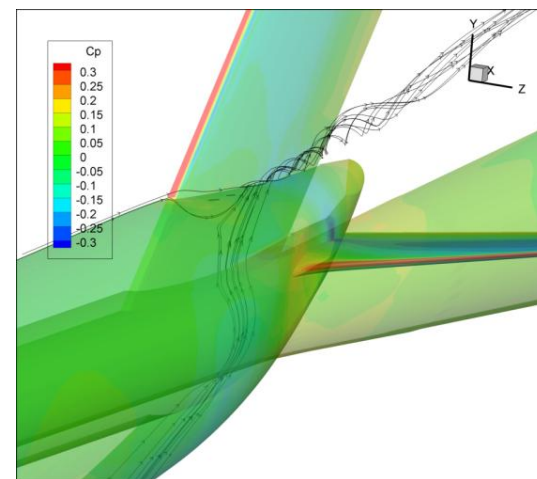
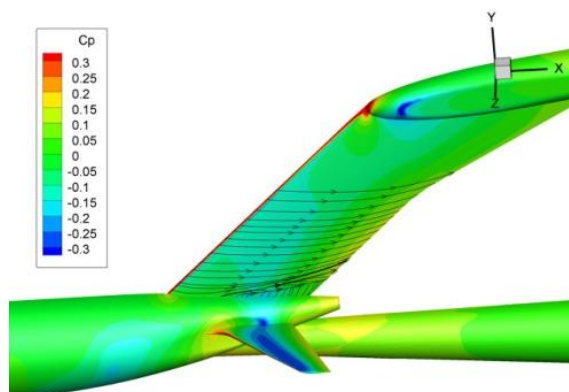
Зленко Н.А.	1971
Босняков С.М.	1975
Михайлов С.В.	1980
Матяш С.В.	1988
Морозов А.Н.	1988
Власенко В.В.	1990
Енгулатова М.Ф.	1991
Лысенков А.В.	2001
Курсаков И.А.	2006
Кажан Е.В.	2006
Савельев А.А.	2009
Ширяева А.А.	2009
Анисимов К.С.	2010
Подаруев В.Ю.	2010
Трошин А.И.	2011
Павлик С.В.	2013
Матяш Е.С.	2014
Молев С.С.	2014

## Примеры задач

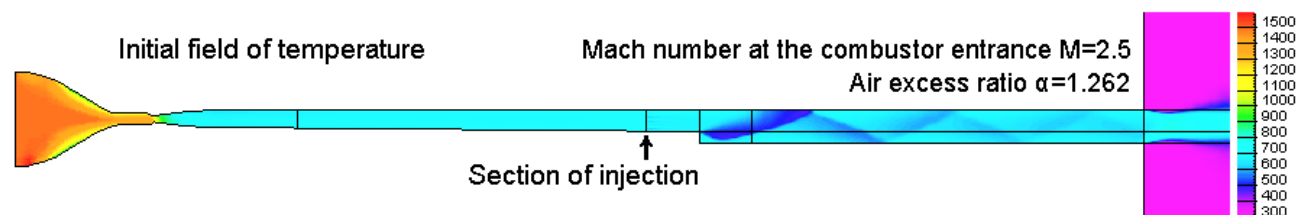
### Взаимодействие реверсивных струй с посадочной механизацией



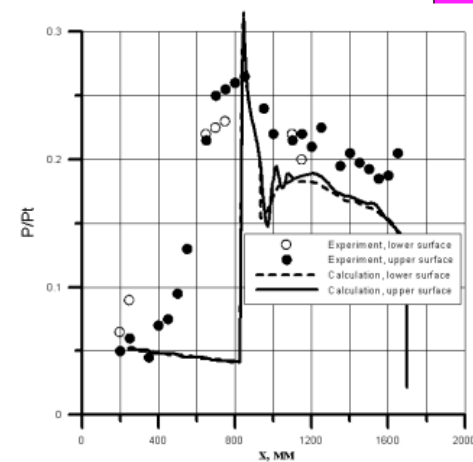
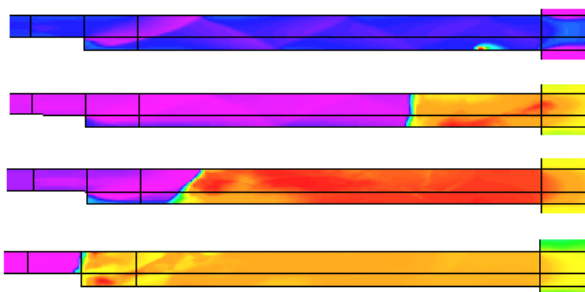
### Оценка влияния протока вокруг килевой державки



### Расчет рабочего процесса в модельной камере сгорания



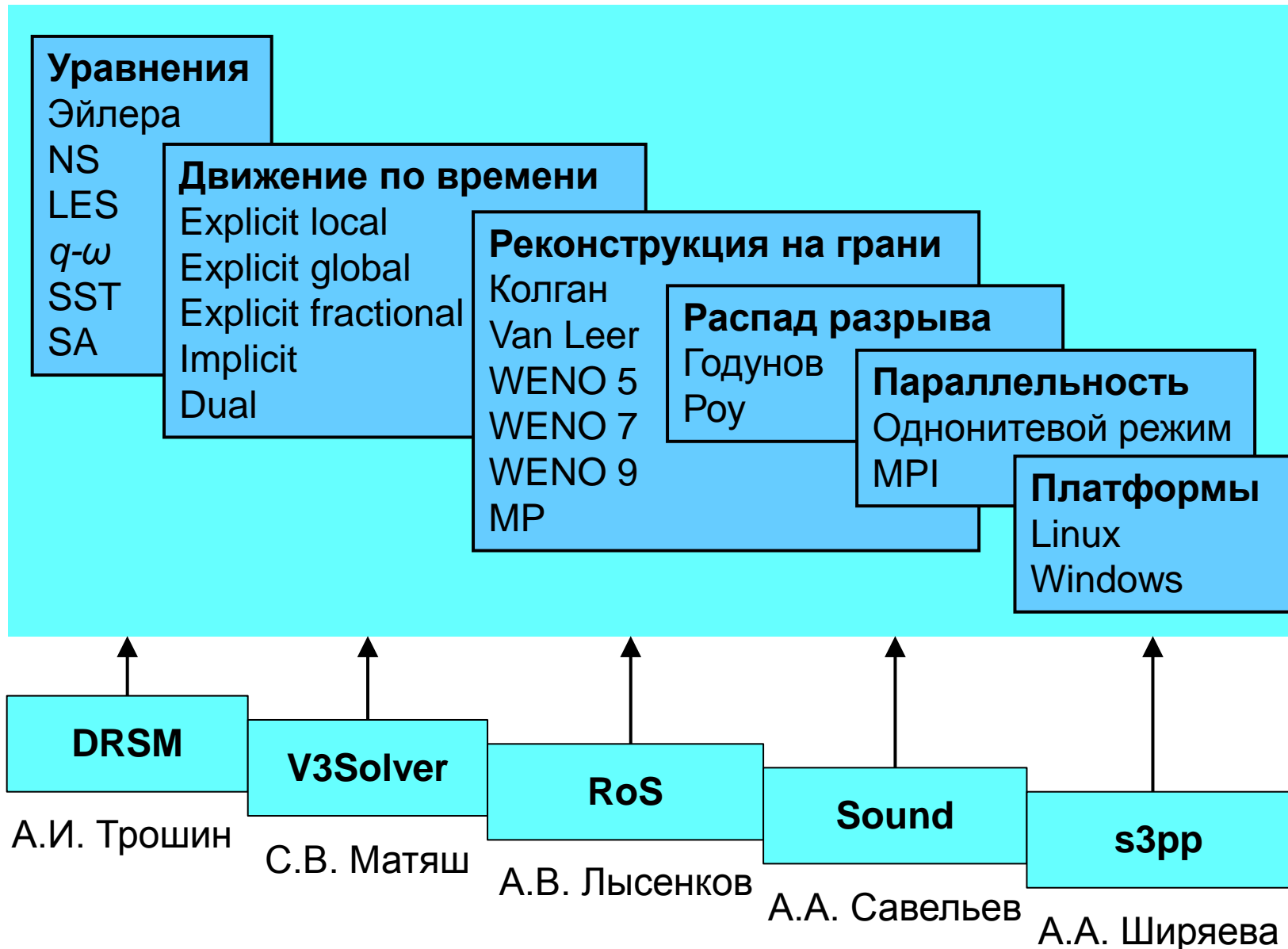
#### Ignition and flow development (fields of temperature in sequential time moments)



# Возможности пакета EWT-ЦАГИ

## Солвер ZEUS

многоблочные структурированные сетки



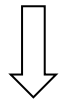
С.В. Михайлов  
В.В. Власенко  
С.В. Матяш  
Е.В. Кажан  
И.А. Курсаков  
А.И. Трошин  
Е.С. Матяш  
С.С. Молев  
В.Ю. Подаруев



### В чем преимущества DRSM-моделей?

#### Буссинесковы модели

аналогия между молекулярной и турбулентной диффузией



турб. потоки импульса:

$$\overline{u'_i u'_j} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \text{div} \bar{\vec{V}} \delta_{ij} \right)$$

используются гипотезы о:

- малости масштабов турбулентности:

$$L_{\text{turb}} \ll L_{\text{mean}}$$

- изотропном характере турб. переноса:

$\nu_t$  — скаляр

- равновесном состоянии турбулентности (большинство моделей):

$$\tau_{\text{turb}} \ll \tau_{\text{mean}}$$

#### Модели класса DRSM

точные ур-ия для турб. потоков импульса:

$$\frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \overline{u'_i u'_j} \cdot \bar{u}_k + T_{ijk} - \nu \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_k} \right] = P_{ij} + \Pi_{ij} - \varepsilon_{ij}$$

$$\overline{u'_i u'_j u'_k} + \frac{p'}{\rho} (\overline{u'_i \delta_{jk}} + \overline{u'_j \delta_{ik}}) / \rho$$

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} \quad \text{— точная формула}$$

производства  $\overline{u'_i u'_j}$

потенциальная возможность описания:

- сильной турбулентности:

$$L_{\text{turb}} \sim L_{\text{mean}}$$

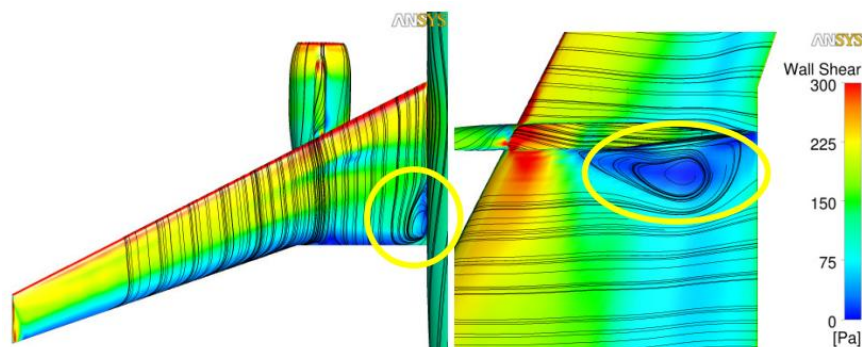
- анизотропной турбулентности

- неравновесной турбулентности:

$$\tau_{\text{turb}} \sim \tau_{\text{mean}}$$

### Задачи, в которых ожидается уточнение результатов

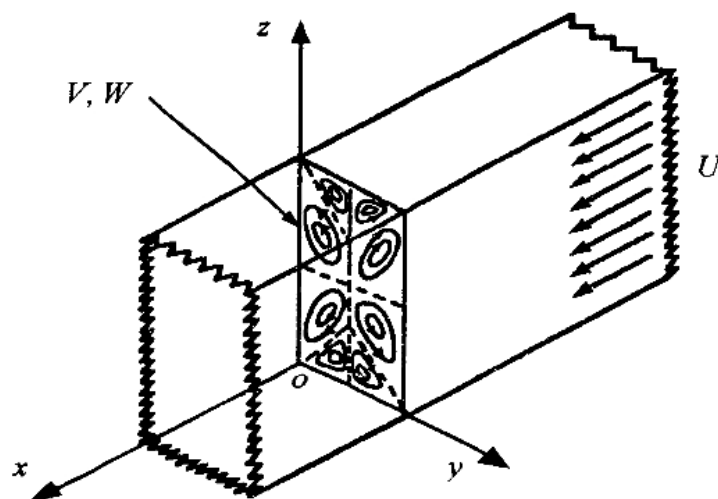
области отрыва потока



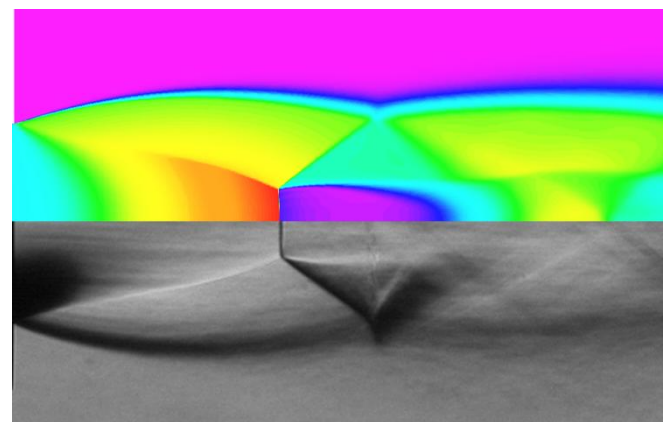
искривленные  
линии тока



вторичные течения в каналах



нетонкослойные области течения



Рисунки 1–3 взяты из:

1. F.R. Menter, A.V. Garbaruk, Y. Egorov. Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows // Proc. EUCASS 2009.
2. D.C. Wilcox. Turbulence modeling for CFD. 3rd ed. La Canada, CA. DCW Industries, 2006.
3. P. Rautheimo, J. Ojala. Description of the numerical methodology for the ERCOFTAC test case F3 // Memo CFD/TERMO-21-97, 1997.

## Реализованные модели турбулентности класса DRSM (1)

Stress- $\omega$  [Wilcox, 2006]

$$k = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) / 2$$

$$\varepsilon = C_\mu k \omega, \quad C_\mu = 0.09$$

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$$

$$\Pi_{ij} = 2 \overline{p' S'_{ij}} / \rho = C_\mu C_1 \omega (-R_{ij} + \frac{2}{3} k \delta_{ij})$$

$$- \alpha' (P_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij}) - \beta' (D_{ij} - \frac{2}{3} P \delta_{ij})$$

$$- \gamma' k (S_{ij} - \frac{1}{3} d \delta_{ij}) \quad (\text{модель LRR})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho \overline{u'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'^2 \bar{u}_k} - \mu \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x_k} - \sigma_R \rho \frac{k}{\omega} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x_k} \right] = \rho \left( P_{xx} + \Pi_{xx} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \\ \frac{\partial \rho \overline{u'v'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'v' \bar{u}_k} - \mu \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_k} - \sigma_R \rho \frac{k}{\omega} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_k} \right] = \rho (P_{xy} + \Pi_{xy}) \\ \frac{\partial \rho \overline{u'w'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'w' \bar{u}_k} - \mu \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x_k} - \sigma_R \rho \frac{k}{\omega} \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x_k} \right] = \rho (P_{xz} + \Pi_{xz}) \\ \frac{\partial \rho \overline{v'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{v'^2 \bar{u}_k} - \mu \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_k} - \sigma_R \rho \frac{k}{\omega} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_k} \right] = \rho \left( P_{yy} + \Pi_{yy} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \\ \frac{\partial \rho \overline{v'w'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{v'w' \bar{u}_k} - \mu \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial x_k} - \sigma_R \rho \frac{k}{\omega} \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial x_k} \right] = \rho (P_{yz} + \Pi_{yz}) \\ \frac{\partial \rho \overline{w'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{w'^2 \bar{u}_k} - \mu \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial x_k} - \sigma_R \rho \frac{k}{\omega} \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial x_k} \right] = \rho \left( P_{zz} + \Pi_{zz} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \omega \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_k} - \sigma_\omega \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] = \rho \frac{\omega}{k} (C_{\omega 1} P - C_{\omega 2} \varepsilon) + \frac{\sigma_d \rho}{\omega} \max \left( \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 0 \right) \end{array} \right.$$

Коэффициенты модели:

коэффициент	$C_{\omega 1}$	$C_{\omega 2}$	$\sigma_R$	$\sigma_\omega$	$\sigma_d$	$C_1$	$\alpha'$	$\beta'$	$\gamma'$
значение	0.52	0.787	0.6	0.5	0.125	1.8	0.78	0.20	0.50



## Реализованные модели турбулентности класса DRSM (2)

SSG/LRR- $\omega$  [Cecora et al., 2012]

$$k = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) / 2$$

$$\varepsilon = C_\mu k \omega, \quad C_\mu = 0.09$$

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$$

$$\Pi_{ij} = 2 \overline{p' S'_{ij}} / \rho \begin{cases} \rightarrow \text{LRR (wall)} \\ \rightarrow \text{SSG (free)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho \overline{u'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'^2} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x_l} \right] &= \rho \left( P_{xx} + \Pi_{xx} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \\ \frac{\partial \rho \overline{u'v'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'v'} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_l} \right] &= \rho (P_{xy} + \Pi_{xy}) \\ \frac{\partial \rho \overline{u'w'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'w'} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x_l} \right] &= \rho (P_{xz} + \Pi_{xz}) \\ \frac{\partial \rho \overline{v'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{v'^2} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_l} \right] &= \rho \left( P_{yy} + \Pi_{yy} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \\ \frac{\partial \rho \overline{v'w'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{v'w'} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial x_l} \right] &= \rho (P_{yz} + \Pi_{yz}) \\ \frac{\partial \rho \overline{w'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{w'^2} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial x_l} \right] &= \rho \left( P_{zz} + \Pi_{zz} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \omega \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_k} - C_\omega \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] &= \rho \frac{\omega}{k} (C_{\omega 1} P - C_{\omega 2} \varepsilon) + \frac{\alpha_d C_{\omega, \text{free}} \rho}{C_\mu \omega} \max \left( \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 0 \right) \end{aligned} \right.$$

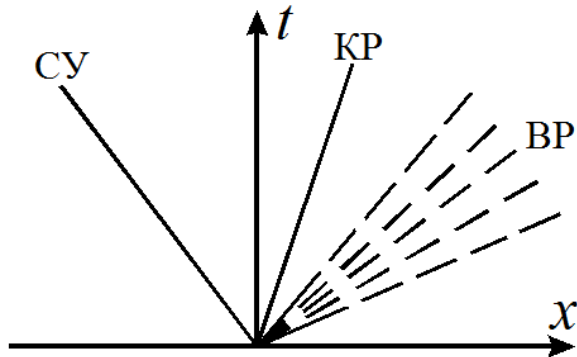
2 набора коэффициентов:

$$F_1 = \text{th}(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left( \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho C_{\omega, \text{free}} k}{\text{CD}_{k\omega} y^2} \right) \quad \text{CD}_{k\omega} = \max \left( 2 \rho C_{\omega, \text{free}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 10^{-10} \right) \quad C = C_{\text{wall}} F_1 + C_{\text{free}} (1 - F_1)$$

область	$C_{\omega 1}$	$C_{\omega 2}$	$C_R$	$C_\omega$	$\alpha_d$	$C_1$	$C_1^*$	$C_2$	$C_3$	$C_3^*$	$C_4$	$C_5$
пристенная	0.5556	0.8333	0.0675	0.045	0	1.8	0	0	0.8	0	0.971	0.578
свободнотурб.	0.44	0.92	0.22	0.077	2	1.7	0.9	1.05	0.8	0.65	0.625	0.2

### Особенности численного метода при использовании модели класса DRSM

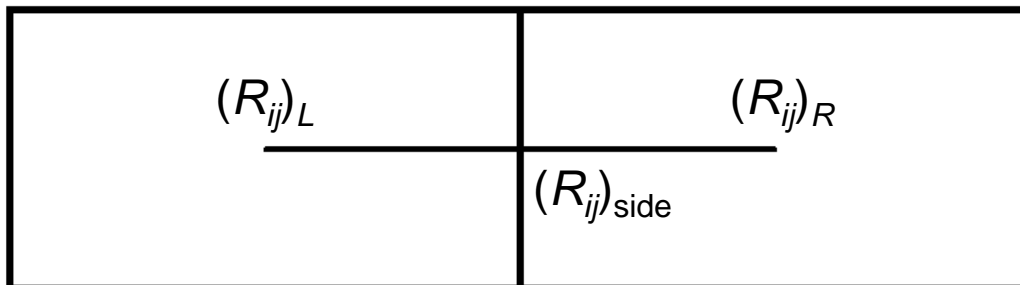
- Реконструкция параметров турбулентности  $(R_{ij}, \omega)$  на грани – с тем же порядком аппроксимации, как и основных переменных  $(T, u, v, w, p)$
- Задача о распаде произвольного разрыва решается в «невязкой» постановке, параметры турбулентности берутся со стороны грани, определяемой положением контактного разрыва



$$(R_{ij})_{\text{ПП}} = \begin{cases} (R_{ij})_L, & u_{\text{KP}} \geq 0 \\ (R_{ij})_R, & u_{\text{KP}} < 0 \end{cases}$$

$$\omega_{\text{ПП}} = \begin{cases} \omega_L, & u_{\text{KP}} \geq 0 \\ \omega_R, & u_{\text{KP}} < 0 \end{cases}$$

- Турбулентные потоки импульса на грани определяются интерполяцией напряжений Рейнольдса из центров смежных ячеек

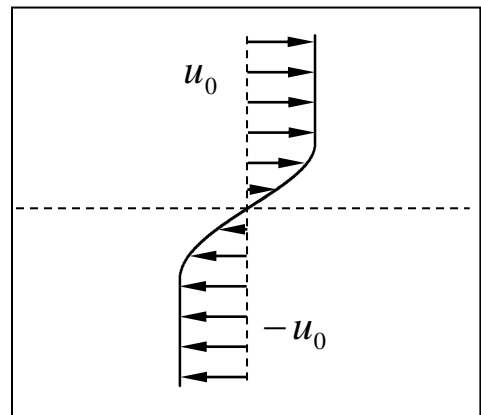


на равномерной сетке:

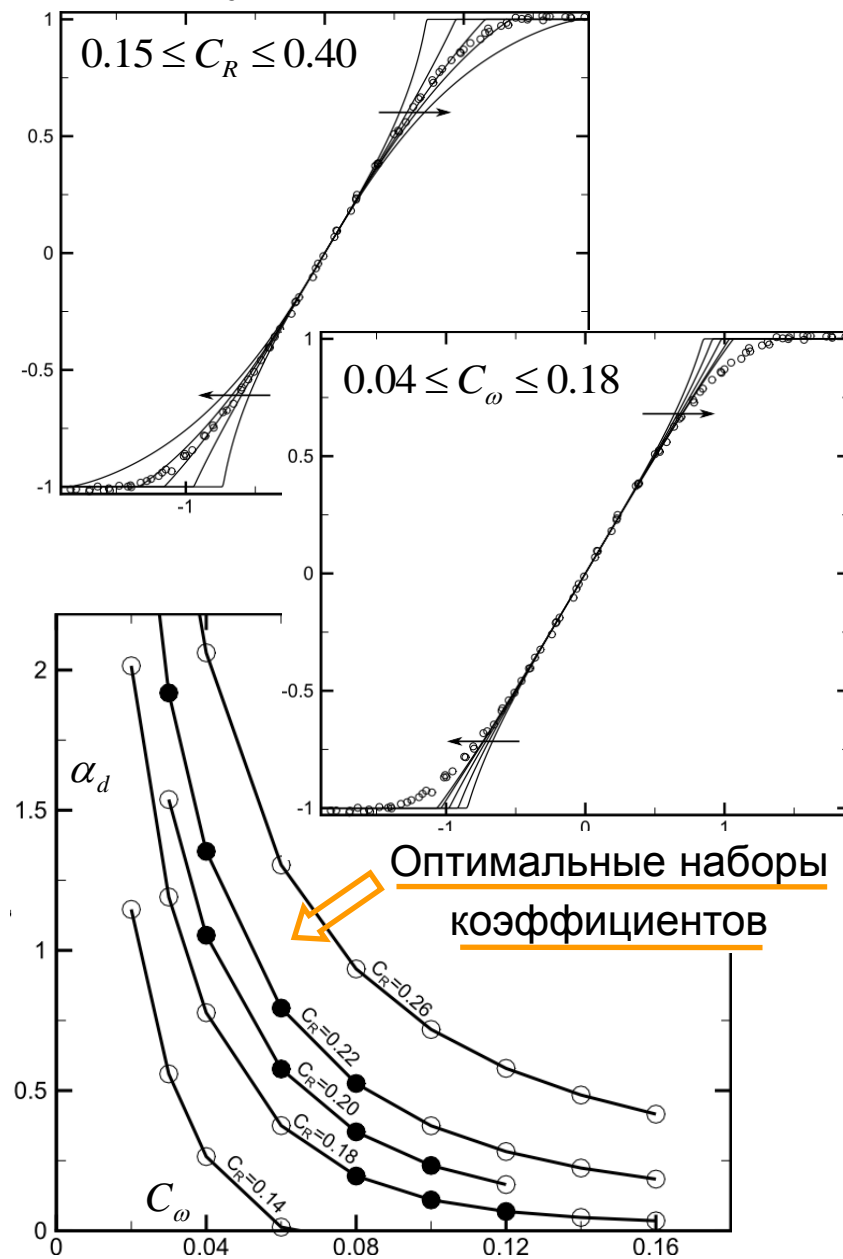
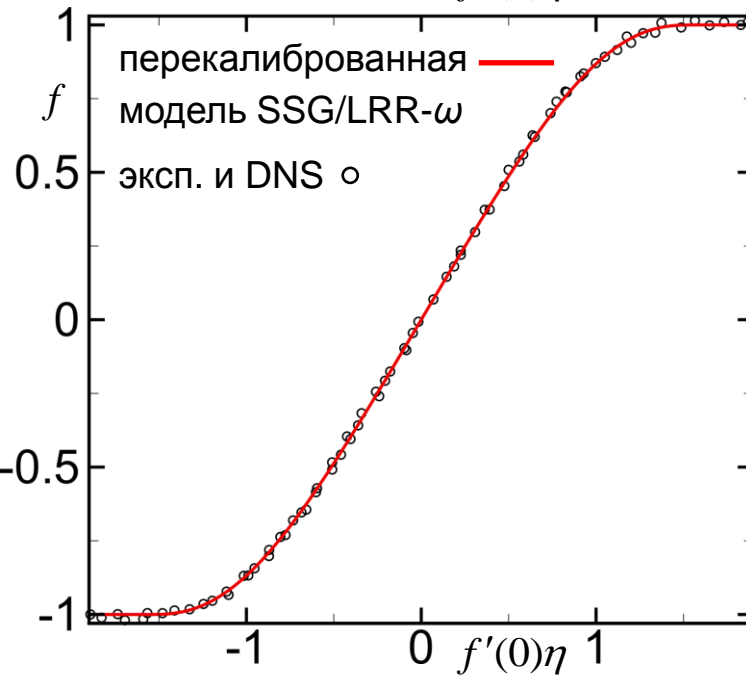
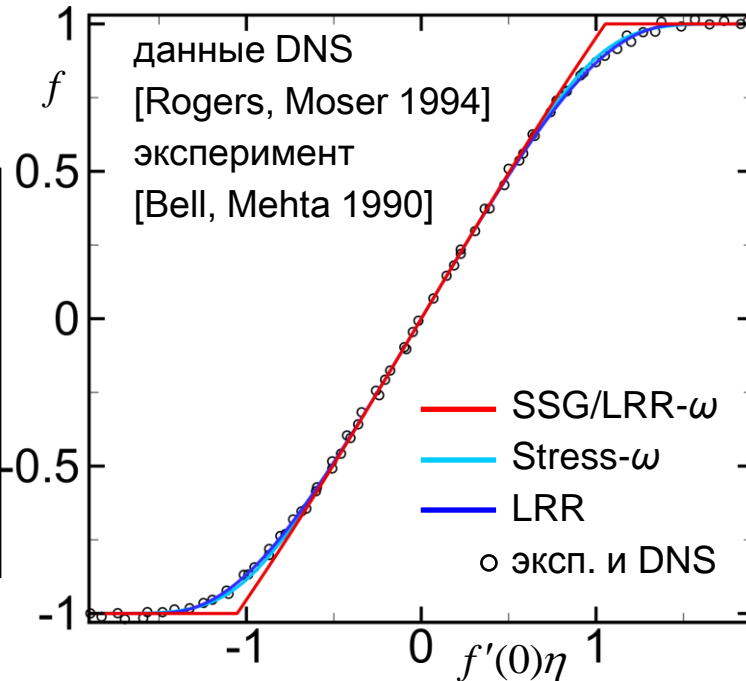
$$(R_{ij})_{\text{side}} = \frac{1}{2} [(R_{ij})_L + (R_{ij})_R]$$

## Настройка модели SSG/LRR- $\omega$ на струйные течения

### 1. Калибровка коэффициентов переноса по временному слою смешения



1. Имеется симметрия относительно центра
2. Продольные градиенты равны нулю
3. Эжекция отсутствует



Метод перебора на многомерной сетке

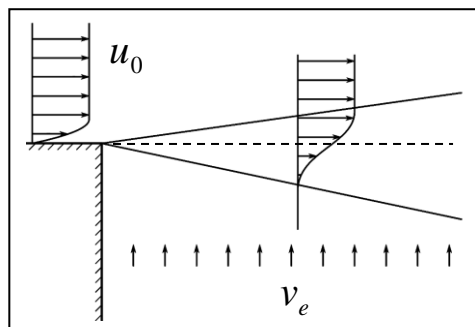
Настройка модели SSG/LRR- $\omega$  на струйные течения

## 2. Калибровка коэффициентов производства и диссипации по слою смешения за уступом

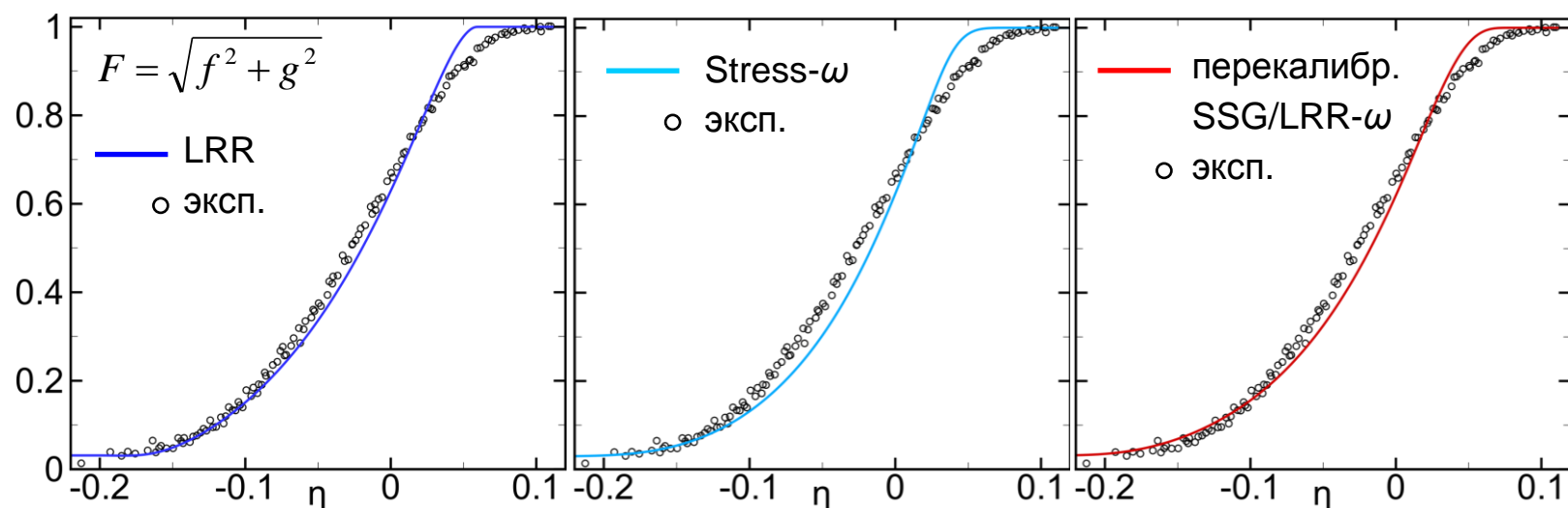
Рассматривались  $0.44 \leq C_{\omega 1} \leq 0.52$ ,  $0.80 \leq C_{\omega 2} \leq 0.92$ 

	$C_{\omega 2} = 0.80$	$C_{\omega 2} = 0.86$	$C_{\omega 2} = 0.92$
$C_{\omega 1} = 0.44$	$C_R = 0.20$ $C_\omega = 0.0627$ $\alpha_d = 0.517$	$C_R = 0.22$ $C_\omega = 0.0499$ $\alpha_d = 0.995$	—
$C_{\omega 1} = 0.48$	—	$C_R = 0.20$ $C_\omega = 0.0593$ $\alpha_d = 0.566$	$C_R = 0.22$ $C_\omega = 0.0445$ $\alpha_d = 1.158$
$C_{\omega 1} = 0.52$	—	—	$C_R = 0.20$ $C_\omega = 0.0560$ $\alpha_d = 0.623$

экспериментальные  
данные:  
[Liepmann, Laufer 1947],  
[Wyganski, Fielder 1970],  
[Champagne, Pao,  
Wyganski 1976],  
[Hussain, Zedan 1978]



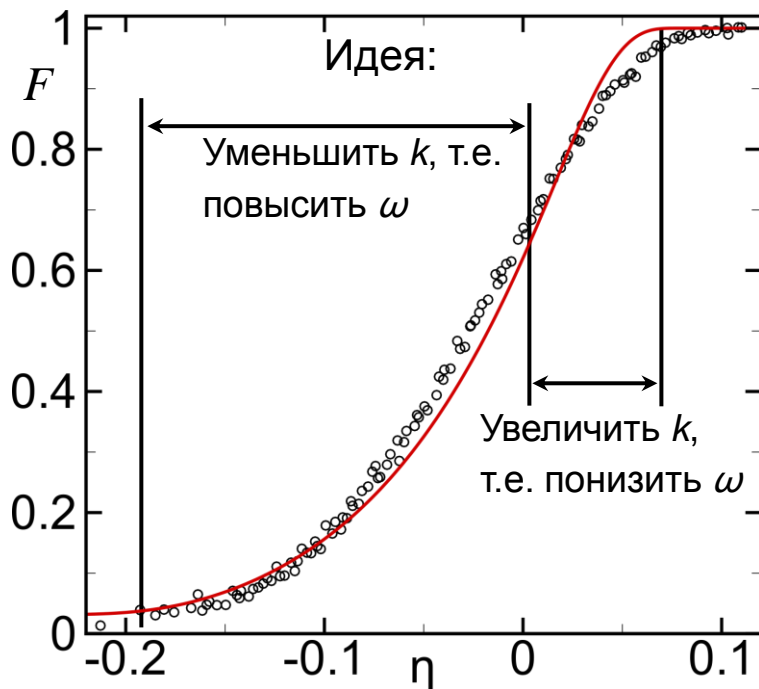
1. Нет несимметрии относительно центра
2. Продольные градиенты не равны нулю
3. Имеется эжекция газа в турбулентную область



Все рассмотренные модели турбулентности искажают профиль скорости в слое смешения за уступом!

## Настройка модели SSG/LRR- $\omega$ на струйные течения

### 3. Уточнение профиля скорости в слое смешения за уступом



Имеем:  $k, \omega, \frac{\partial k}{\partial x_i}, \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$

составляем безразмерные скалярные комплексы:

$$N_{kk} = \frac{1}{k\omega^3} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad N_{k\omega} = \frac{1}{\omega^4} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j},$$

$$N_{\omega k} = \frac{1}{\omega^4} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad N_{\omega\omega} = \frac{k}{\omega^5} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j},$$

источниковый член:

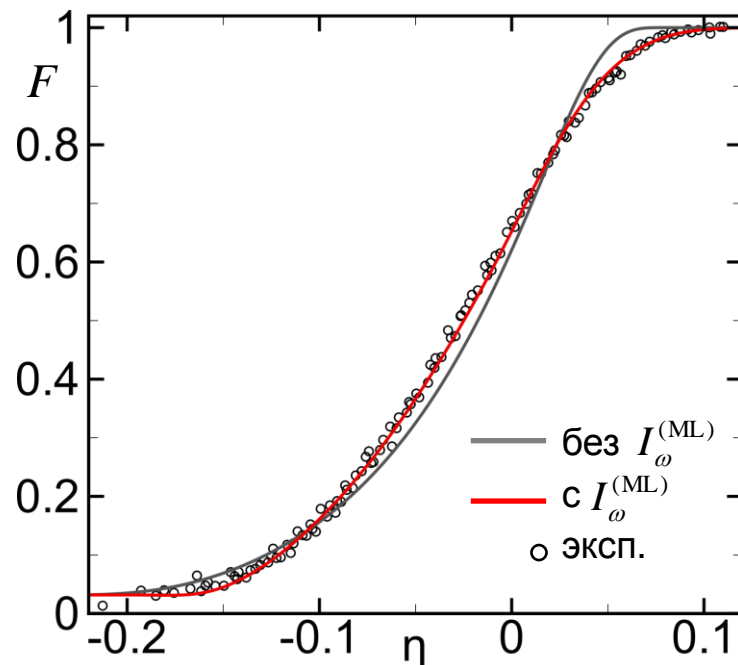
$$I_{\omega}^{(ML)} = -\underbrace{(C_{kk}N_{kk} + C_{k\omega}N_{k\omega} + C_{\omega k}N_{\omega k})}_{\equiv 0 \text{ в слоях смешения}} \underbrace{+ C_{\omega\omega}N_{\omega\omega}}_{\text{неэффективен}} \omega^2 = -C_{\omega k}N_{\omega k}\omega^2$$

$C_{\omega k} = 20$

Доп. источниковый член  $I_{\omega}$  в уравнении для  $\omega$  должен учитывать:

- продольную неоднородность течения  $(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial k}{\partial x}, \frac{\partial \omega}{\partial x})$
- эффекты эжекции  $(\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x})$

$I_{\omega}$  должен быть «нечетной функцией»:  
 $I_{\omega}(-\eta) \approx -I_{\omega}(\eta)$

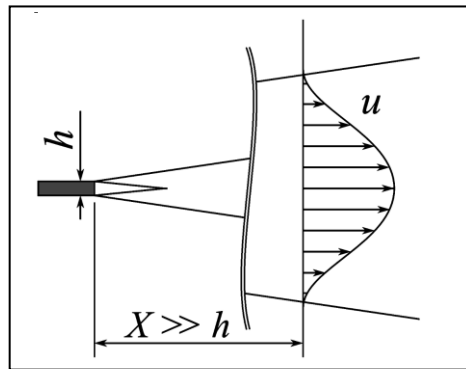


ширина слоя смешения не меняется!



## Настройка модели SSG/LRR- $\omega$ на струйные течения

### 4. Дальнейшая настройка по основному участку плоской и круглой струй

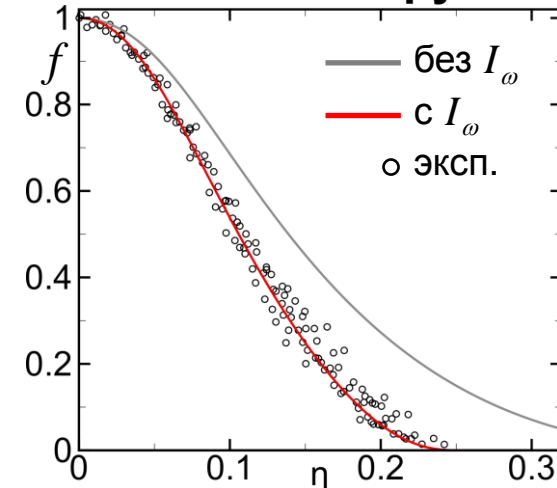


**Плоская струя: доработка доп. источников члена**

$$I_{\omega}^{(\text{JET})} = - \left( \underbrace{C_{kk} N_{kk} + C_{k\omega} N_{k\omega}}_{\neq 0} + \underbrace{C_{\omega k} N_{\omega k} + C_{\omega\omega} N_{\omega\omega}}_{\text{оставляем настройку по слою смешения}} \right) \omega^2$$

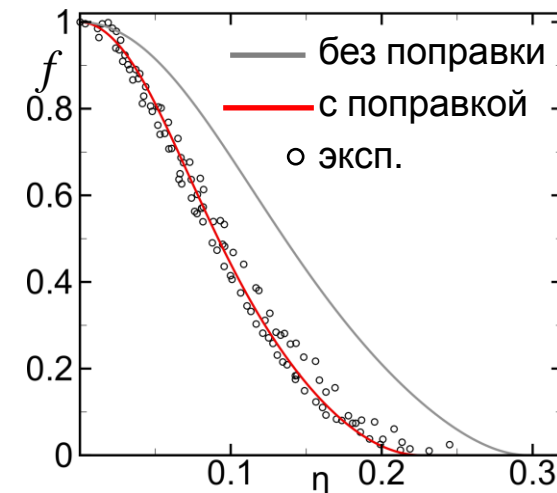
Калибровка:  $C_{k\omega} = C_{\omega k} = C_{\omega 3} = 20$

### Плоская струя



эксп. данные: [Heskestad 1965],  
[Gutmark, Wygnanski 1976],  
[Ramaprian, Chandrasekhara 1985]

### Круглая струя



эксп. данные:  
[Wygnanski, Fiedler 1969],  
[Panchapakesan, Lumley 1993],  
[Hussein, Capp, George 1994]

### Круглая струя: включение поправки на осесимметричность

[Pore 1978]: в круглой струе есть дополнительный источник диссипации  $k$ , связанный с растяжением вихрей в азимутальном направлении:

$$\frac{\partial \rho \varepsilon_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\dots] = \bar{\rho} \left( P_{\varepsilon} - \varepsilon_{\varepsilon} + \underbrace{C_{\varepsilon}^{(\text{ax})} \frac{\varepsilon_s^2}{k}}_{\neq 0} \chi \right), \quad \chi = \frac{\bar{\Omega}_{ij} \bar{\Omega}_{jk} \bar{S}_{ki}}{(C_{\mu} \omega)^3}$$

• Для SSG/LRR- $\omega$  «распределим» поправку по двум к-там (аналогично [Wilcox 1998]):

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} [\dots] = \bar{\rho} \frac{\omega}{k} \left( C_{\omega 1} P / \underbrace{f_{\text{ax}}}_{\neq 0} - C_{\omega 2} \underbrace{f_{\text{ax}}}_{\neq 0} C_{\mu} k \omega \right) + \dots$$

• [Lau et al. 1979]: слои смешения круглой и плоской струй подобны => поправку надо включать за пределами начального участка струи

$$f_{\text{ax}} = 1 + \left( \frac{1 + C_{\text{ax}} |\chi|}{1 + 100 |\chi|} - 1 \right) \cdot \text{AI} \quad \text{AI} = \min \left[ \frac{8 N_{kk}^2}{(N_{kk} - N_{\omega k})^2}, 1 \right]$$

AI – индикатор: в слое смешения AI=0  
на переходном и основном участках струи AI=1

## Реализованные модели турбулентности класса DRSM (3)

SSG/LRR- $\omega$ -2 [Трошин, 2014]

$$k = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}) / 2$$

$$\varepsilon = C_\mu k \omega, \quad C_\mu = 0.09$$

$$P_{ij} = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$$

$$\Pi_{ij} = 2 \overline{p' S'_{ij}} / \rho \begin{cases} \rightarrow \text{LRR (wall)} \\ \rightarrow \text{SSG (free)} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho \overline{u'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'^2} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x_l} \right] &= \rho \left( P_{xx} + \Pi_{xx} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \\ \frac{\partial \rho \overline{u'v'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'v'} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x_l} \right] &= \rho (P_{xy} + \Pi_{xy}) \\ \frac{\partial \rho \overline{u'w'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{u'w'} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x_l} \right] &= \rho (P_{xz} + \Pi_{xz}) \\ \frac{\partial \rho \overline{v'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{v'^2} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial x_l} \right] &= \rho \left( P_{yy} + \Pi_{yy} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \\ \frac{\partial \rho \overline{v'w'}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{v'w'} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial x_l} \right] &= \rho (P_{yz} + \Pi_{yz}) \\ \frac{\partial \rho \overline{w'^2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \overline{w'^2} \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial x_k} - C_R \rho \frac{k}{\varepsilon} \overline{u'_k u'_l} \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial x_l} \right] &= \rho \left( P_{zz} + \Pi_{zz} - \frac{2}{3} \varepsilon \right) \end{aligned} \right.$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \omega \bar{u}_k - \mu \frac{\partial \omega}{\partial x_k} - C_\omega \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] = \rho \frac{\omega}{k} (C_{\omega 1} \tilde{P} - C_{\omega 2} \tilde{\varepsilon}) + \frac{\alpha_d C_{\omega, \text{free}} \rho}{C_\mu \omega} \max \left( \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 0 \right) - C_{\omega 3} \cdot 0.03 \text{th} \left( \frac{1}{0.03} \frac{1}{\omega^4} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left[ \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] \right) \cdot \omega^2$$

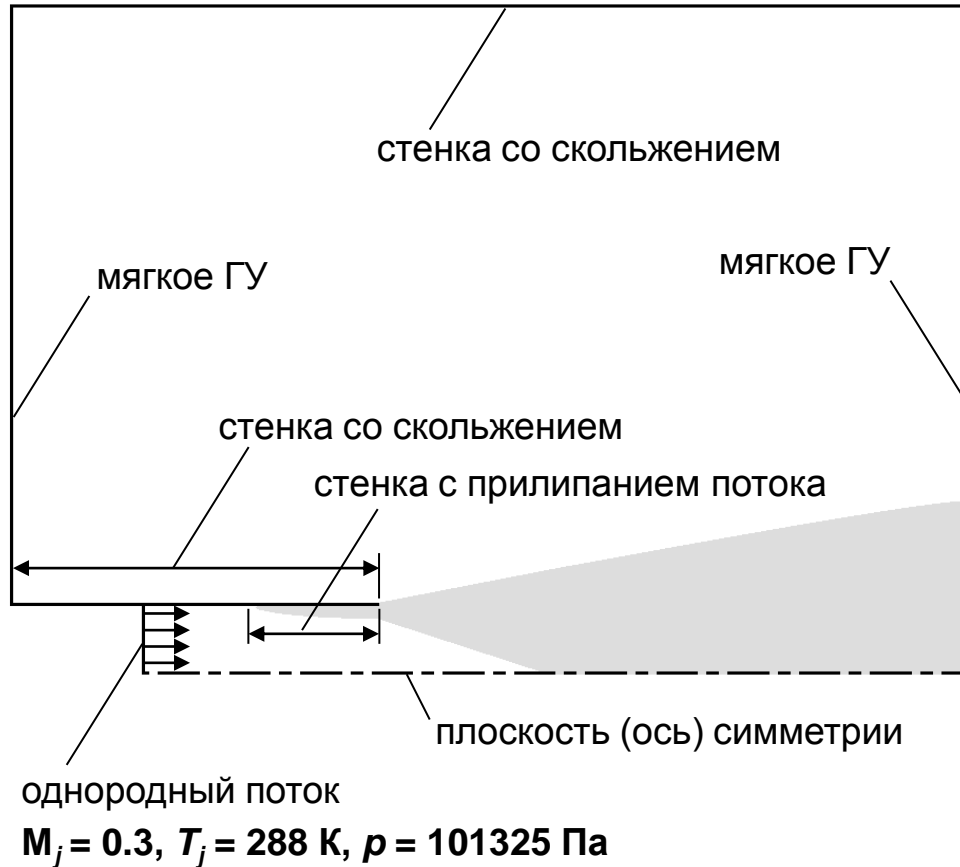
2 набора коэффициентов:

$$F_1 = \text{th}(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left( \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho C_{\omega, \text{free}} k}{\text{CD}_{k\omega} y^2} \right) \quad \text{CD}_{k\omega} = \max \left( 2 \rho C_{\omega, \text{free}} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 10^{-10} \right) \quad C = C_{\text{wall}} F_1 + C_{\text{free}} (1 - F_1)$$

область	$C_{\omega 1}$	$C_{\omega 2}$	$C_R$	$C_\omega$	$\alpha_d$	$C_{\omega 3}$	$C_1$	$C_1^*$	$C_2$	$C_3$	$C_3^*$	$C_4$	$C_5$
пристенная	0.5556	0.8333	0.0675	0.045	0	0	1.8	0	0	0.8	0	0.971	0.578
свободнотурб.	0.48	0.86	0.20	0.0593	0.566	20	1.7	0.9	1.05	0.8	0.65	0.625	0.2

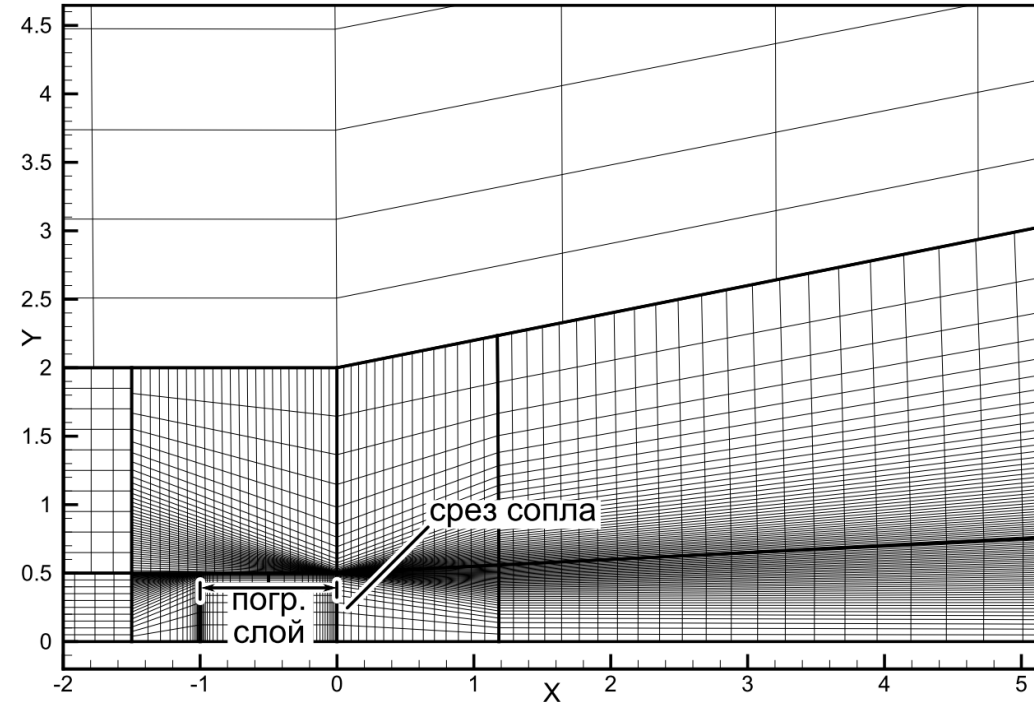
### Тестовые расчеты 1. Дозвуковые затопленные струи

#### Постановка задачи



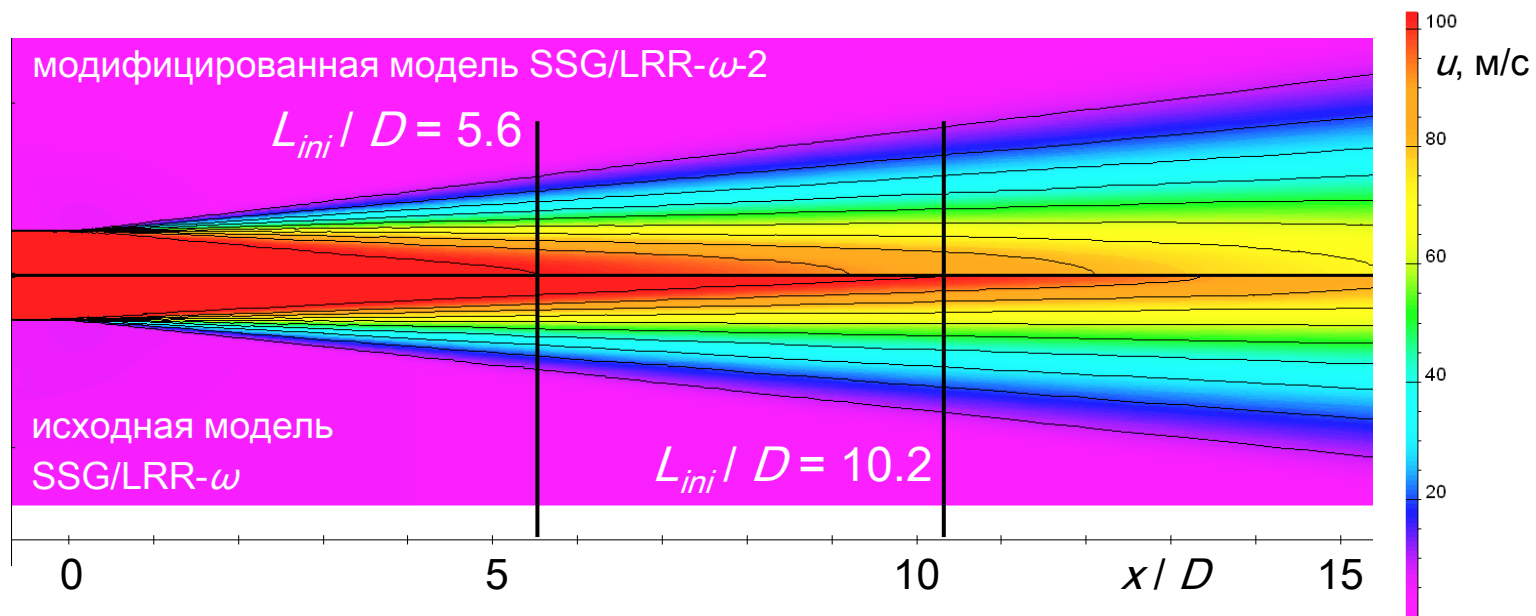
- плоская струя
  - круглая струя (осесимметричная постановка)
- $Re_D = 6.7 \times 10^6$

#### Сетка вблизи сопла



- 60 ячеек поперек слоя смещения струи
- 70 ячеек поперек половины струи на основном участке
- 25–30 ячеек поперек пограничного слоя

# Тест 1А: плоская затопленная струя $M_j = 0.3$



Осевое распределение скорости на начальном и переходном участках струи

эксперименты:

$$4 \leq L_{ini}/D \leq 6$$

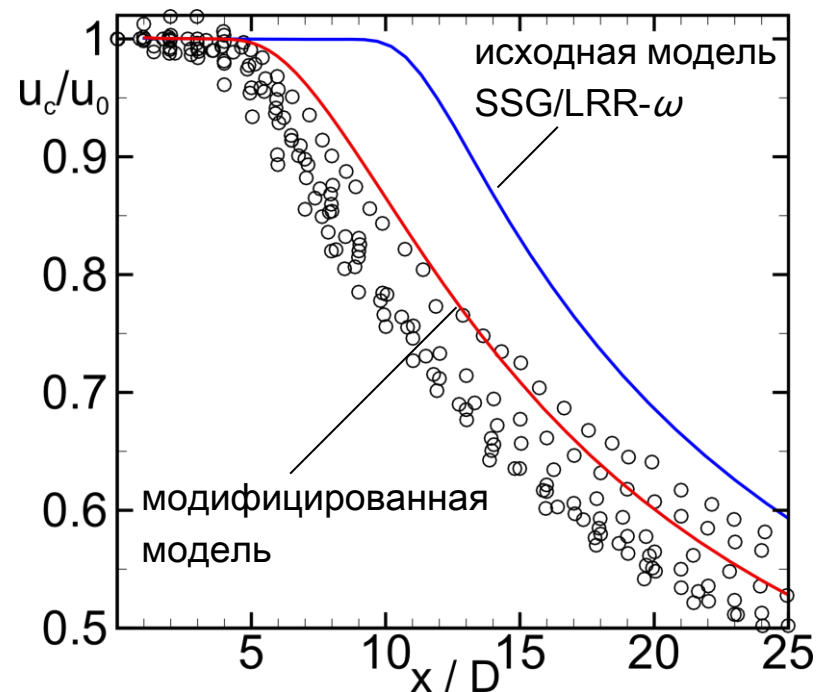
экспериментальные данные:

[Gutmark, Wygnanski 1976]

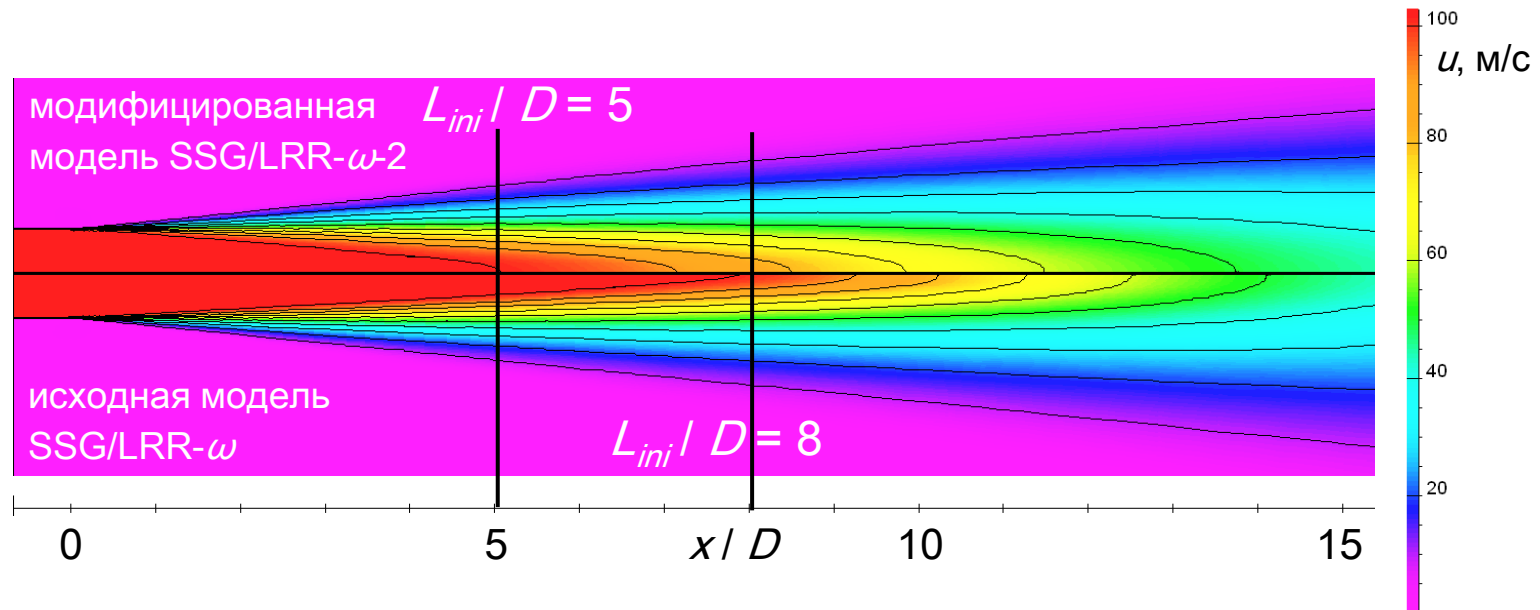
[Ramaprian, Chandrasekhara 1985]

[Deo, Mi, Nathan 2007, 2008]

[Alnahhal, Panidis 2009]



## Тест 1Б: круглая затопленная струя $M_j = 0.3$



Осевое распределение скорости на начальном и переходном участках струи

эксперименты:

$$4 \leq L_{ini}/D \leq 6$$

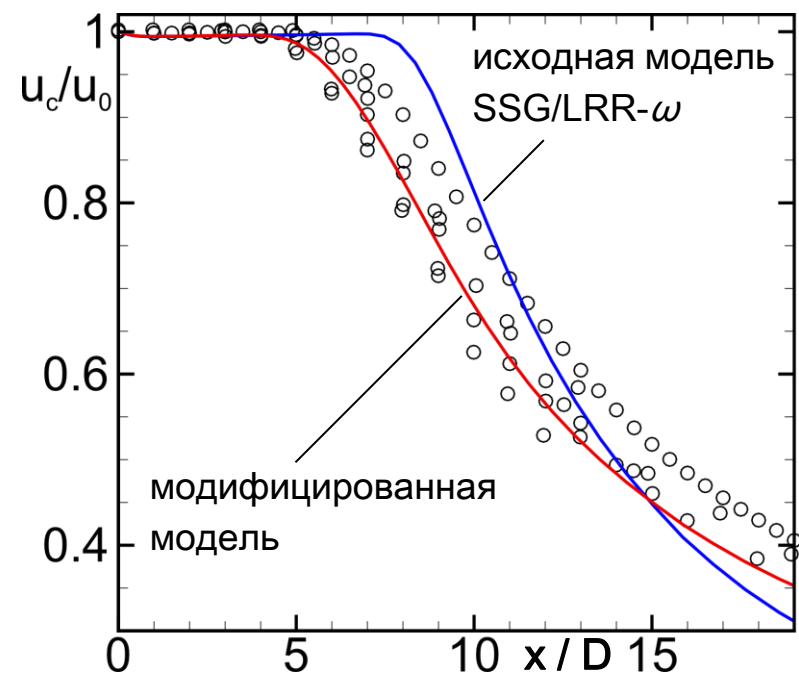
экспериментальные данные:

[Hussein, Capp, George 1994]

[Wyganski, Fiedler 1969]

[Lau, Morris, Fischer 1979]

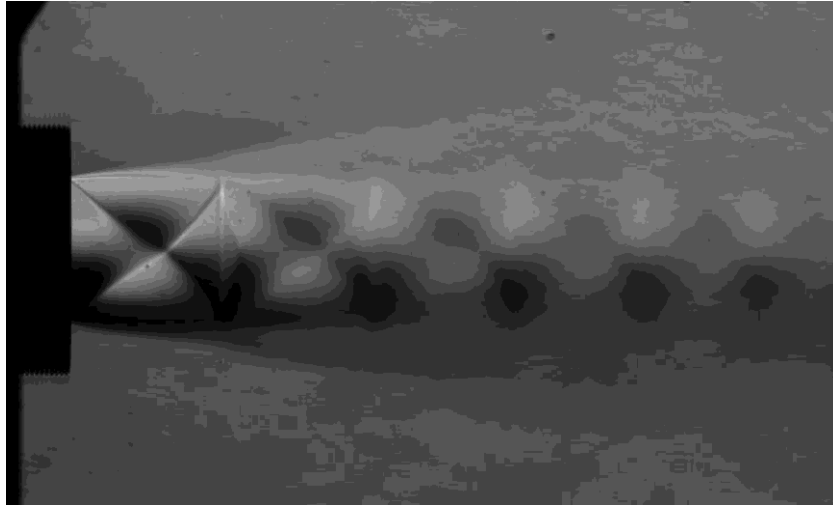
[Bridges, Wernet 2010]





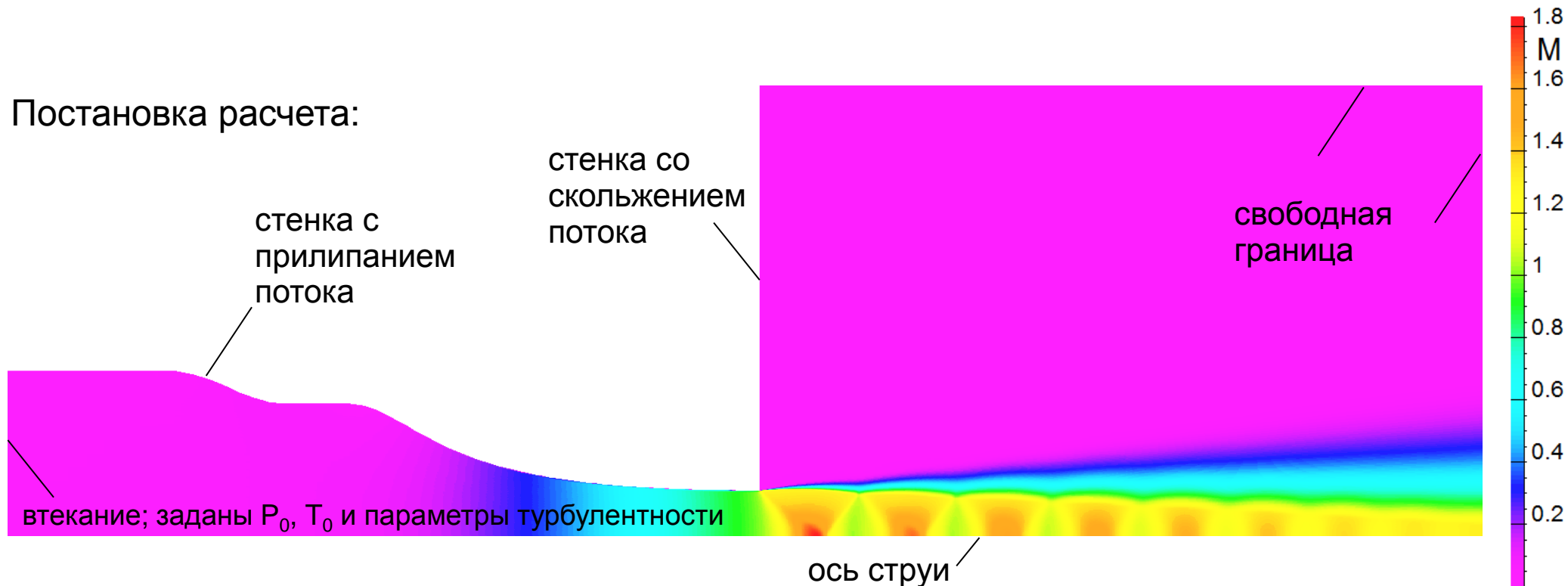
### Тест 2: сверхзвуковая струя NPR=2.8

[Запрягаев, Киселев, Пивоваров, Губанов 2014]



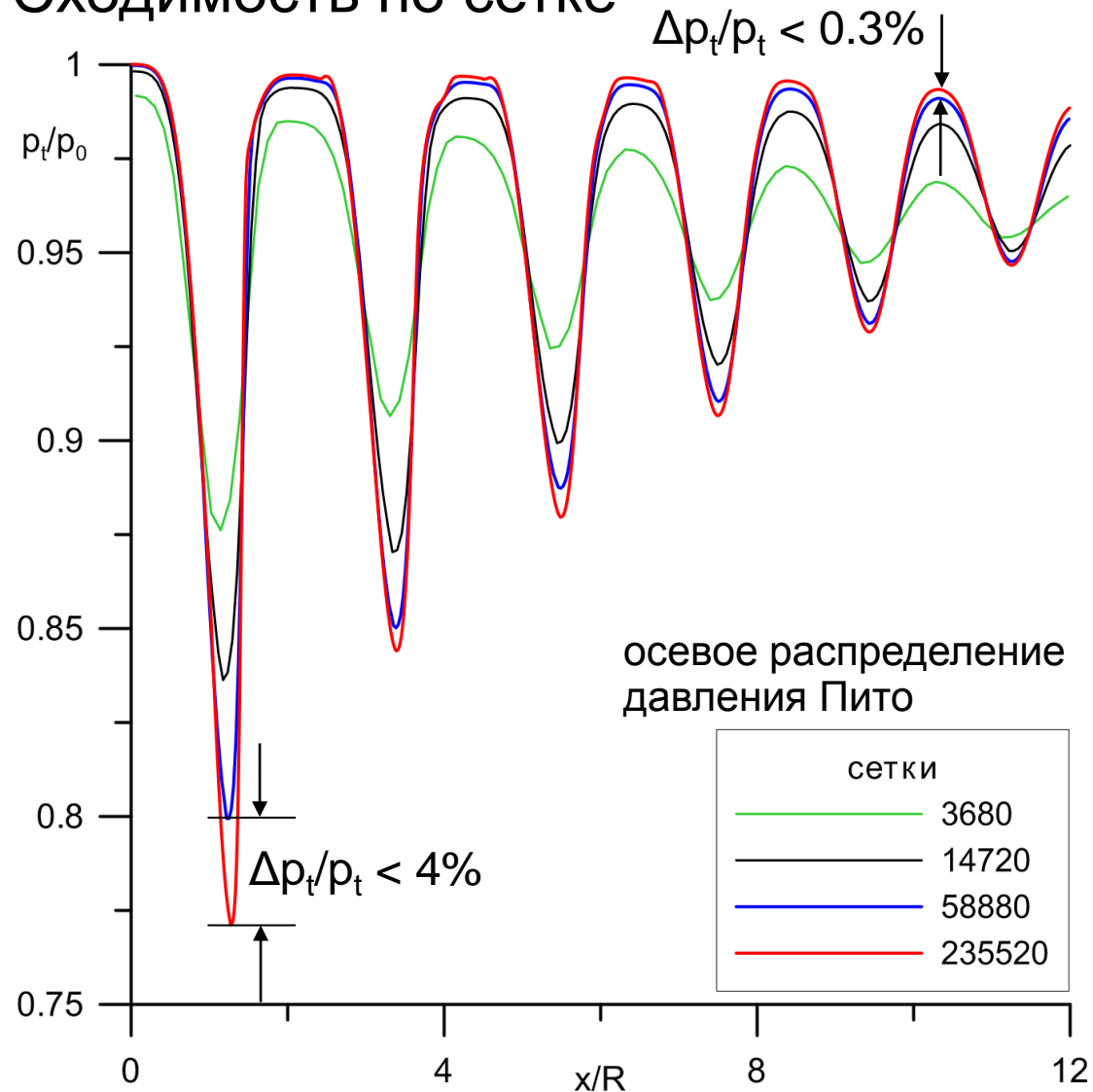
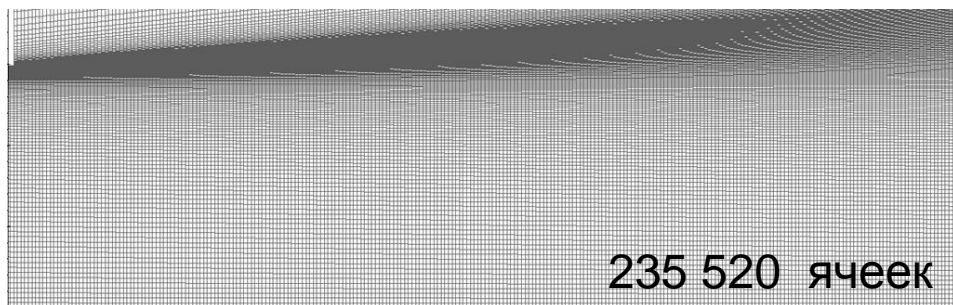
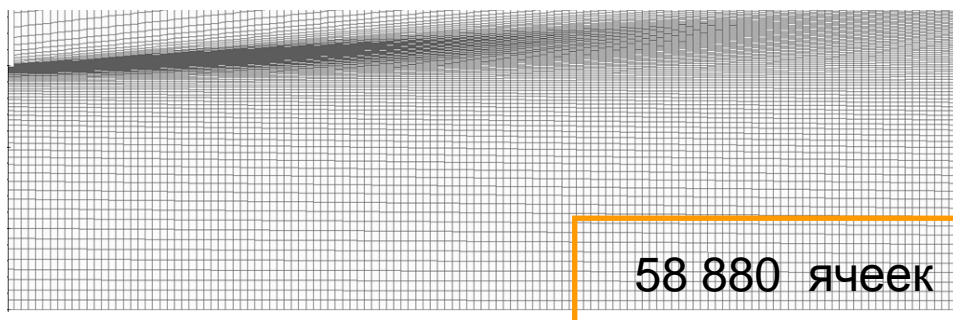
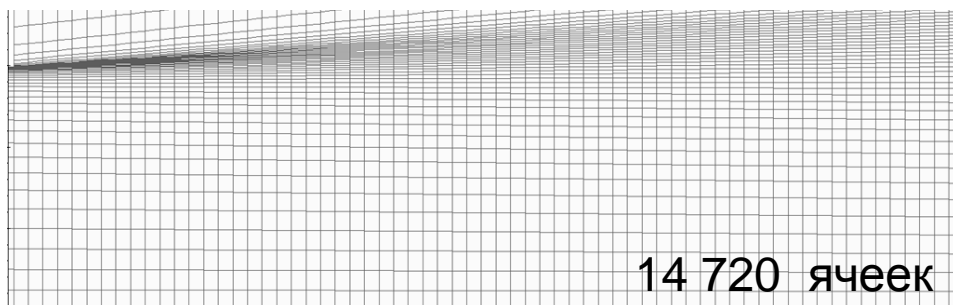
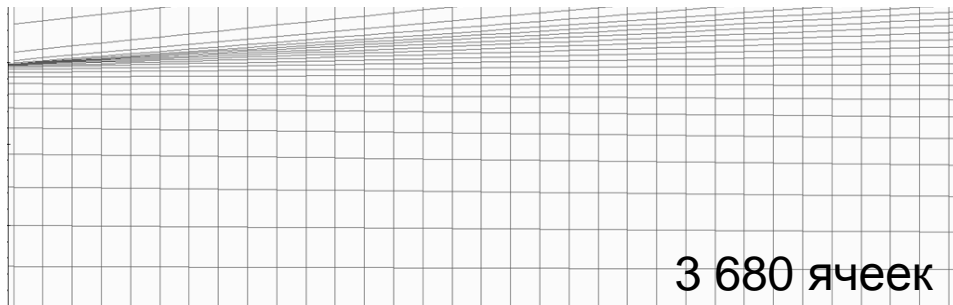
- Воздух
- Холодная струя
- Круглое сопло
- Число Маха на срезе  $M=1$
- Режим  $NPR=2.8$
- Регулярное отражение скачков уплотнения

Постановка расчета:



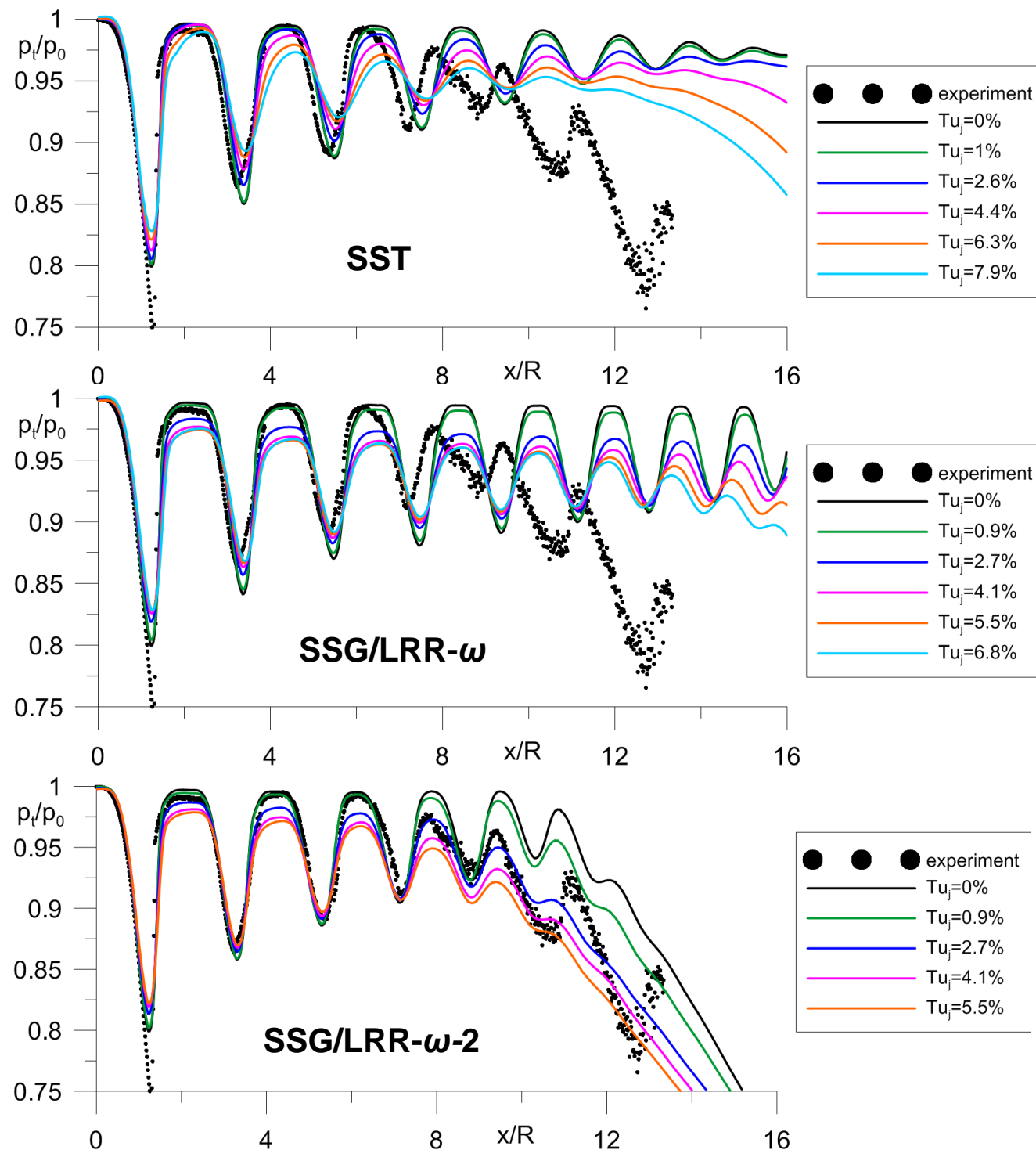
### Струя NPR=2.8. Сходимость по сетке

4 вложенных расчетных сетки:



- Положение «бочек» на всех сетках за исключением самой грубой одинаковое
- На сетке 58 880 ячеек существенные отличия (более 1%) от самой подробной – только на границе первых двух «бочек»

## 4. Тестовые расчеты



Струя NPR=2.8.

Чувствительность решений к входному уровню турбулентности

**SST:**

- первые 4 «бочки» описываются корректно при  $Tu_j \leq 1\%$
- понижение  $p_t$  в эксперименте при  $x/R > 8$  не воспроизводится
- ошибка в длине «бочек» 6%

**SSG/LRR- $\omega$ :**

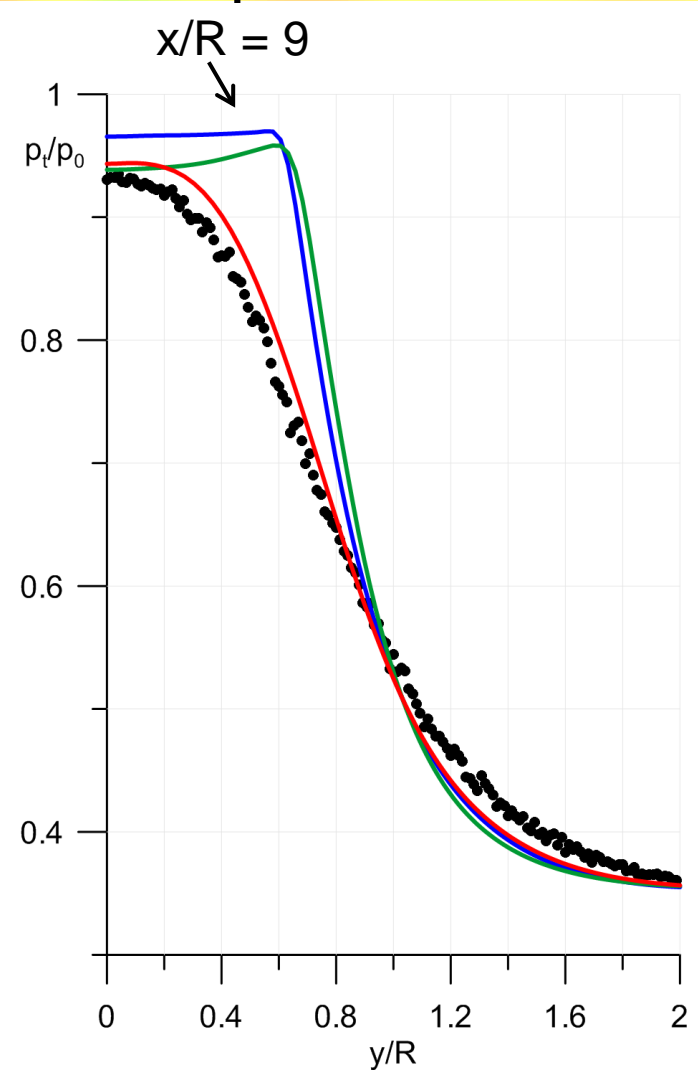
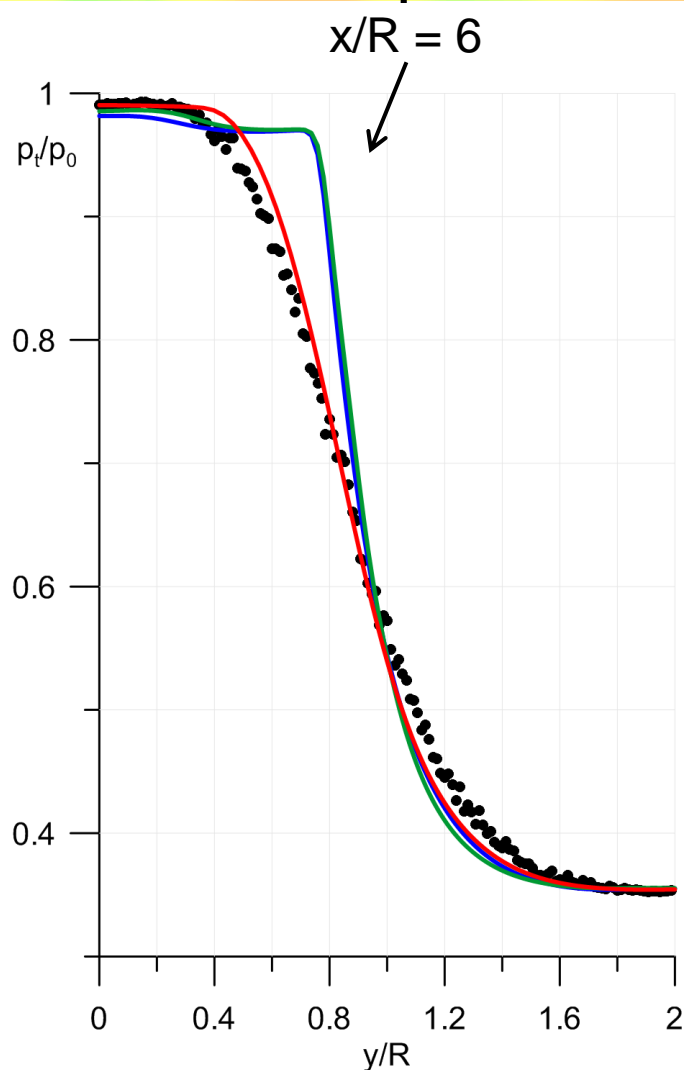
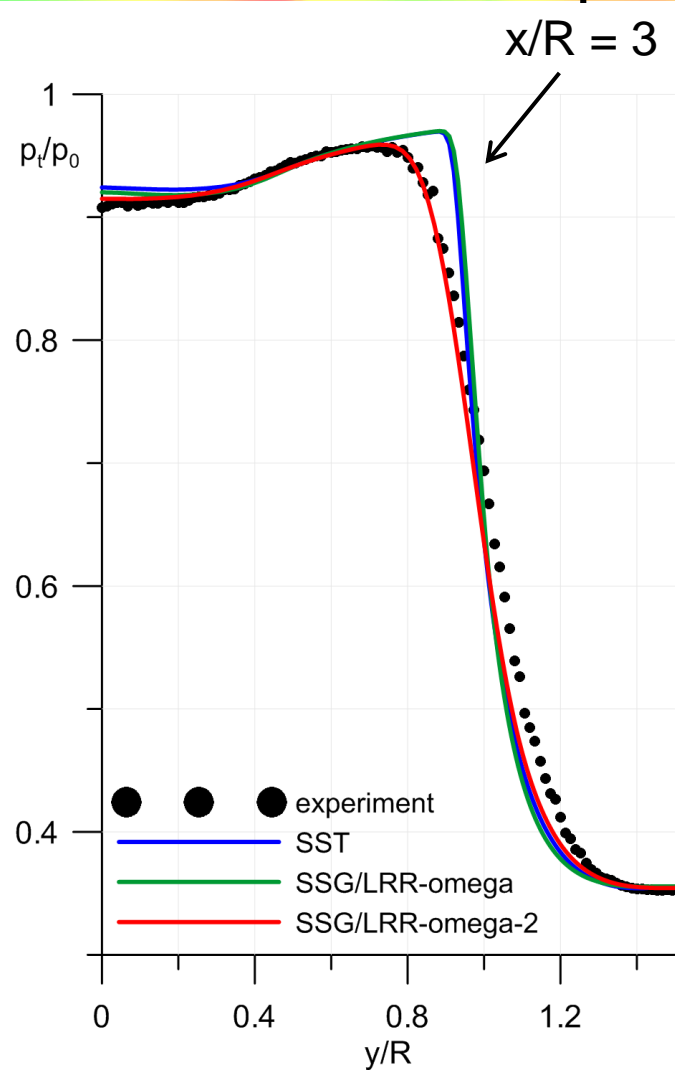
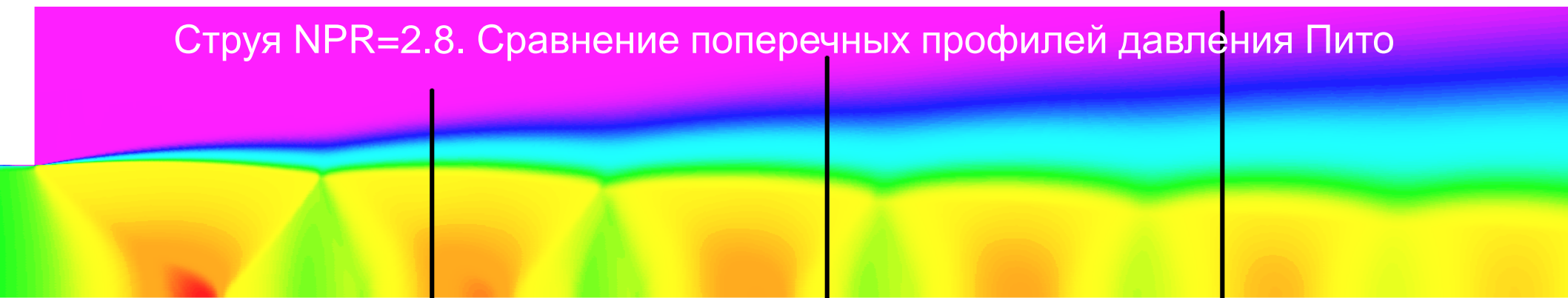
- первые 4 «бочки» описываются корректно при  $Tu_j \leq 1\%$
- понижение  $p_t$  в эксперименте при  $x/R > 8$  не воспроизводится
- ошибка в длине «бочек» 5%

**SSG/LRR- $\omega$ -2:**

- первые 5 «бочек» описываются корректно при  $Tu_j \leq 1\%$
- воспроизводится понижение  $p_t$  в эксперименте при  $x/R > 8$
- ошибка в длине «бочек» 2-3%

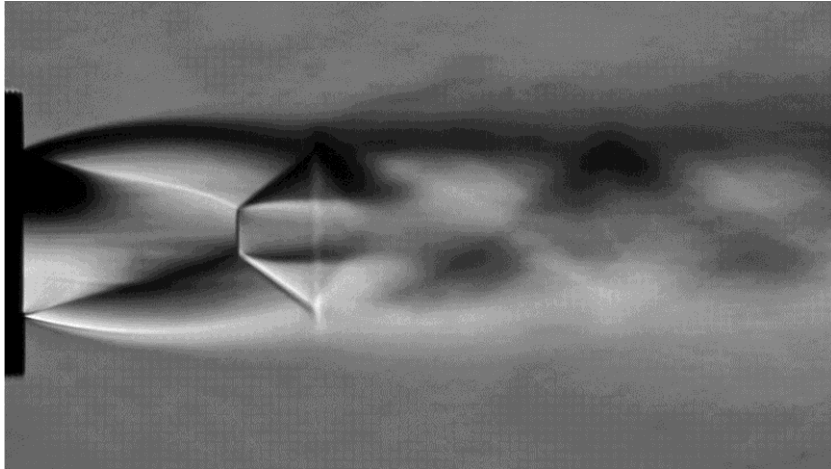
#### 4. Тестовые расчеты

Струя NPR=2.8. Сравнение поперечных профилей давления Пито



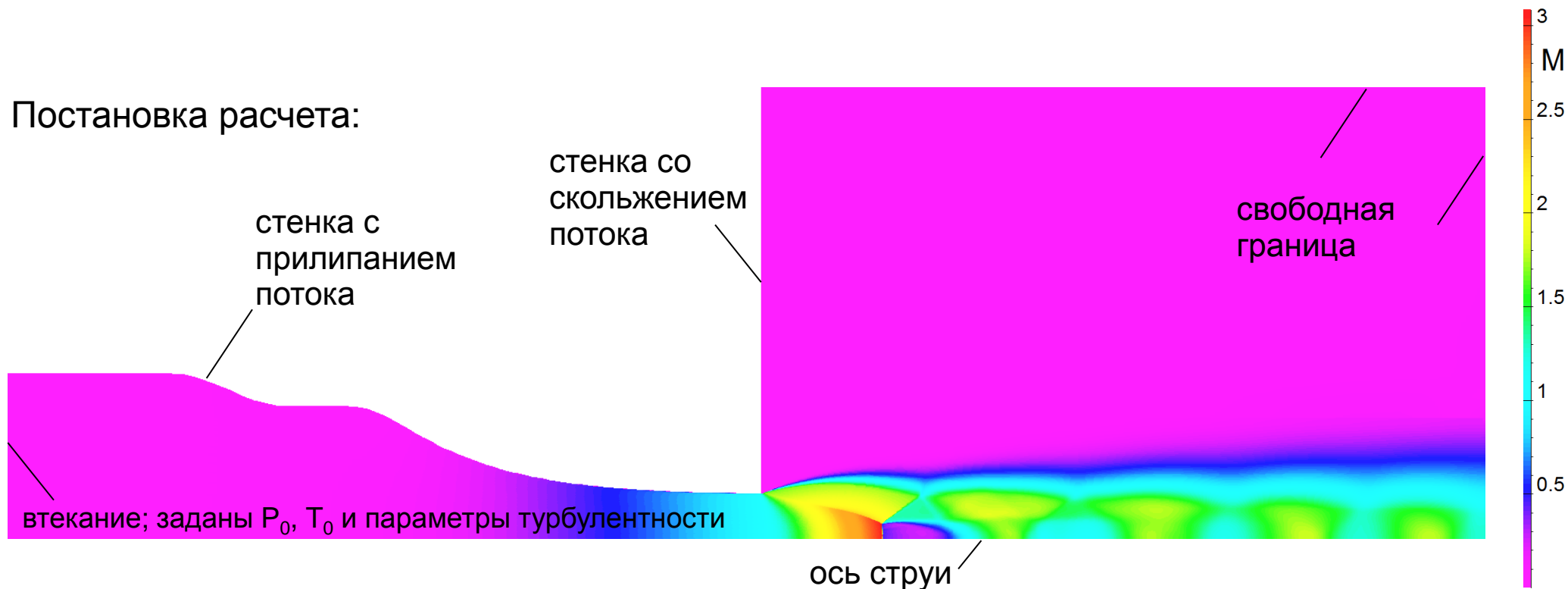
### Тест 2: сверхзвуковая струя NPR=5.0

[Запрягаев, Киселев, Пивоваров, Губанов 2010]



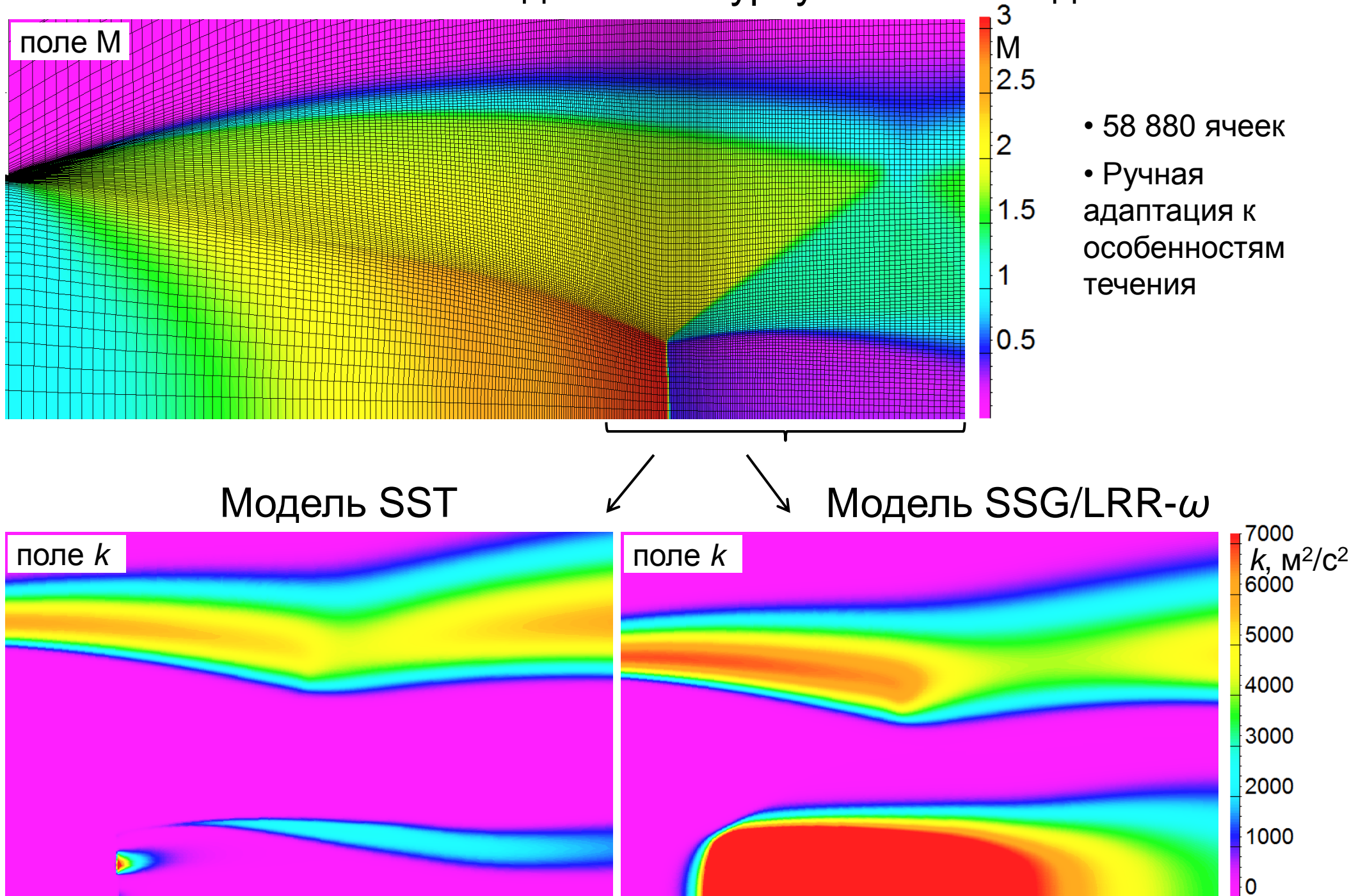
- Воздух
- Холодная струя
- Круглое сопло
- Число Маха на срезе  $M=1$
- Режим  $NPR=5.0$
- Нерегулярное отражение скачков уплотнения

Постановка расчета:



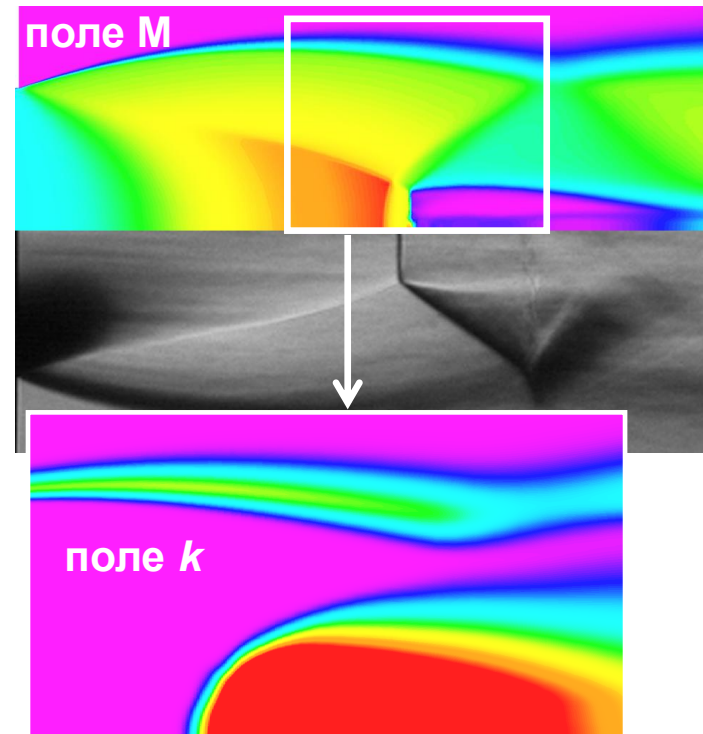


## Расчетная сетка. Взаимодействие турбулентности с диском Маха

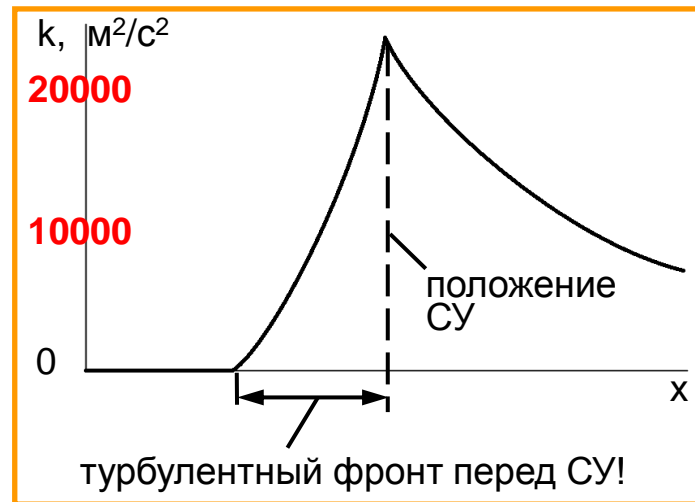


## Ограничитель турбулентной диффузии для моделей класса DRSM

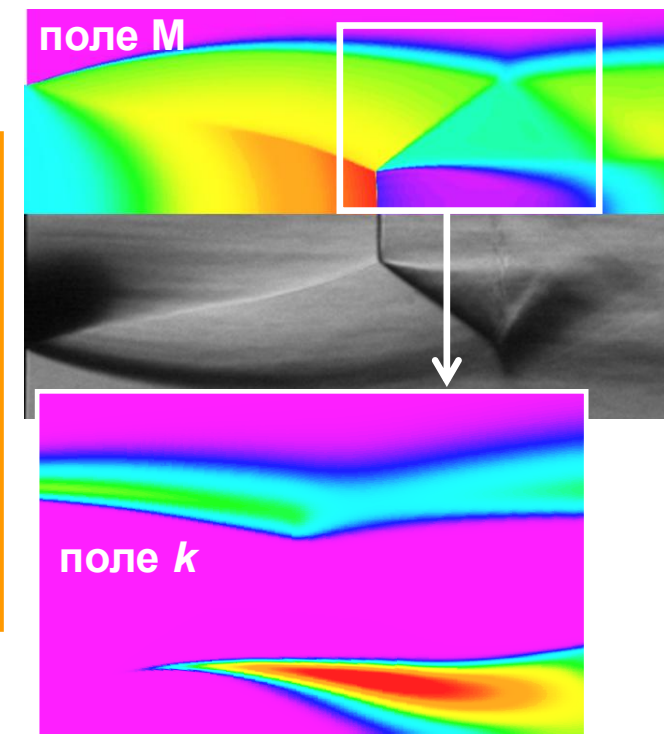
Решение без ограничителя турбулентных потоков:



Наблюдаемое поведение  $k$  в окрестности скачка:



Решение с ограничителем турбулентных потоков:



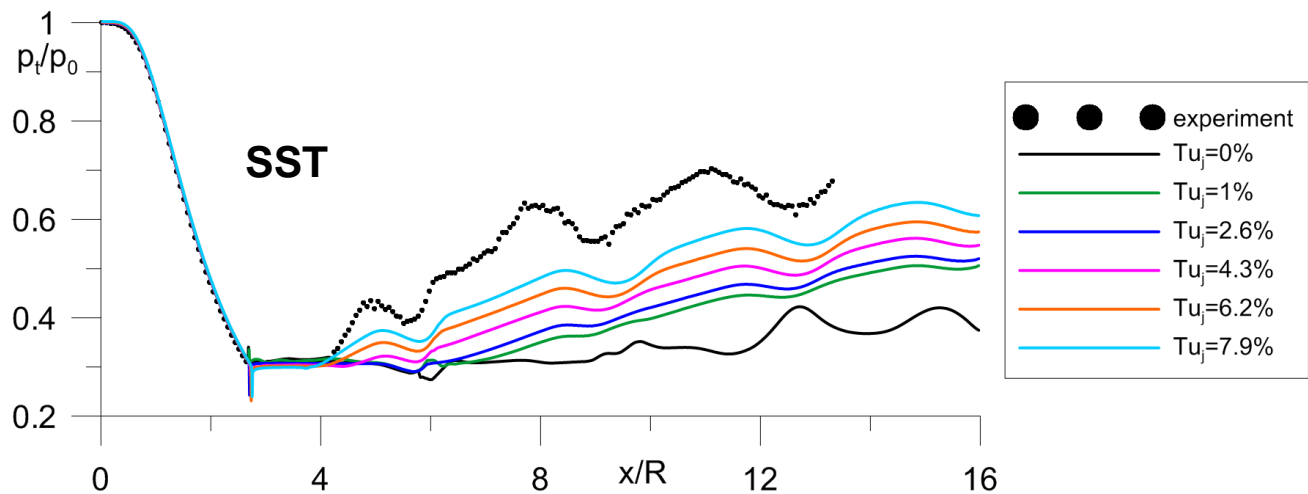
“Взрыв” турбулентности! Решение: ограничитель диффуз. потоков параметров т-ти [Wilcox 2006]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \rho \overline{u'_i u'_j}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \dots - \frac{C_R}{C_\mu} \frac{\overline{\rho u'_k u'_l}}{\omega^*} \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_l} \right] &= \dots \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \dots - \frac{C_\omega}{C_\mu} \frac{\overline{\rho k}}{\omega^*} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] &= \dots \end{aligned} \right.$$

$$\omega^* = \max \left( \omega, C_{\lim} \sqrt{2 \overline{S_{ij} S_{ij}}} \right), C_{\lim} = 2.9$$

- качественно правильная турбулизация внутреннего слоя смешения
- сеточно-независимое усиление  $k$  на скачке уплотнения

## 4. Тестовые расчеты

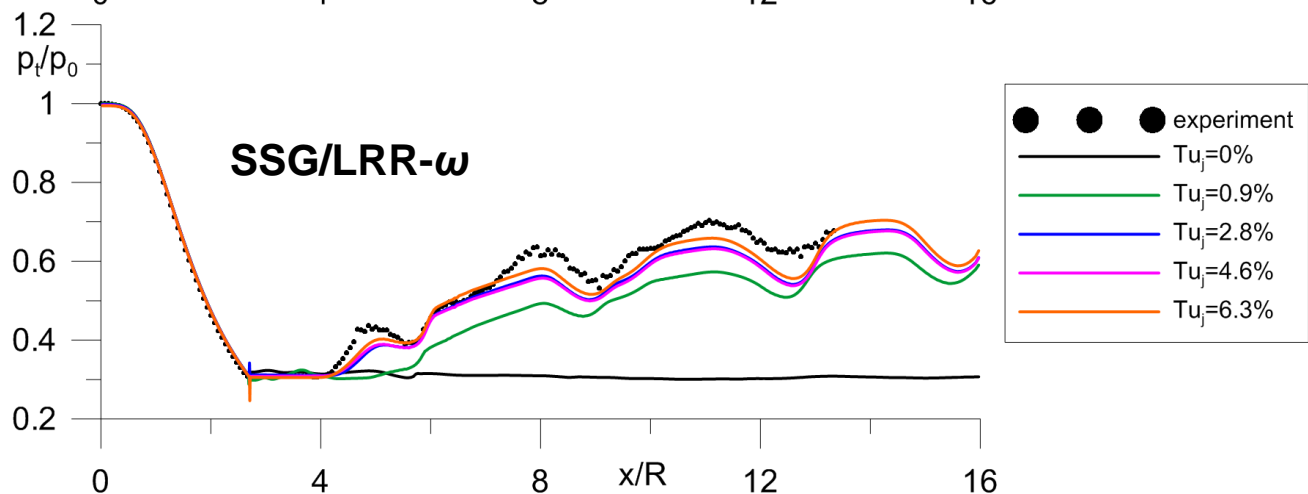


Струя NPR=5.0.

Чувствительность решений к входному уровню турбулентности

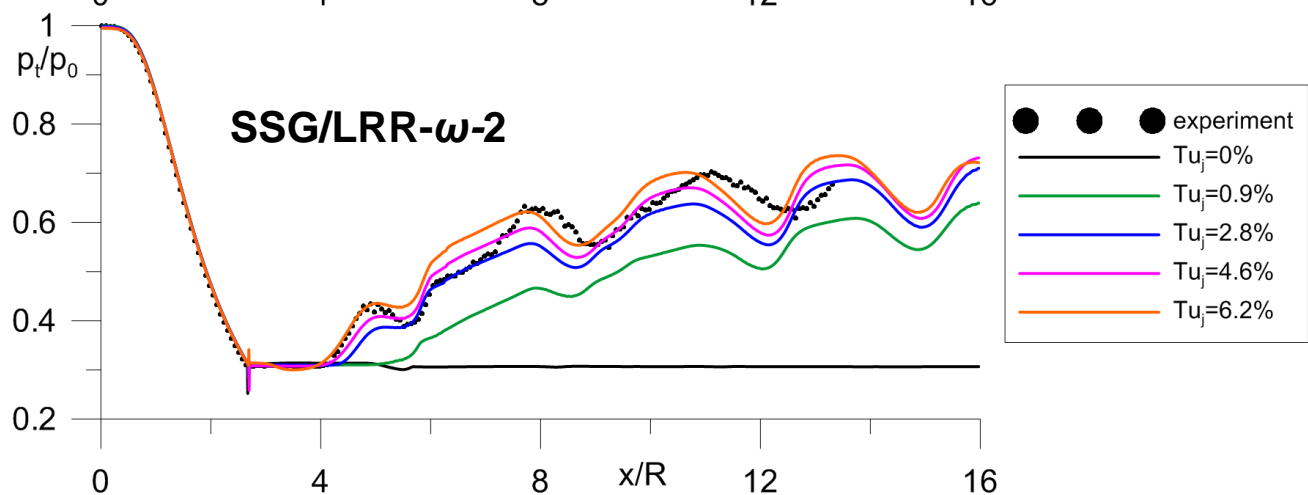
SST:

- корректная скорость восстановления давления на оси не достигается даже при  $Tu_j \approx 8\%$



SSG/LRR- $\omega$ :

- давление на оси восстанавливается почти до экспериментального уровня при  $Tu_j > 2.8\%$

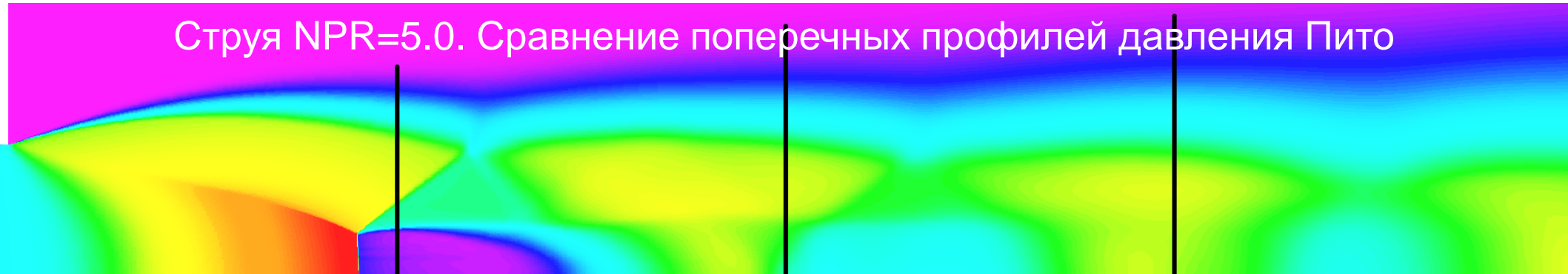


SSG/LRR- $\omega$ -2:

- давление на оси восстанавливается почти до экспериментального уровня при  $Tu_j \sim 2.8\%$  и чувствительно к дальнейшему повышению  $Tu_j$

#### 4. Тестовые расчеты

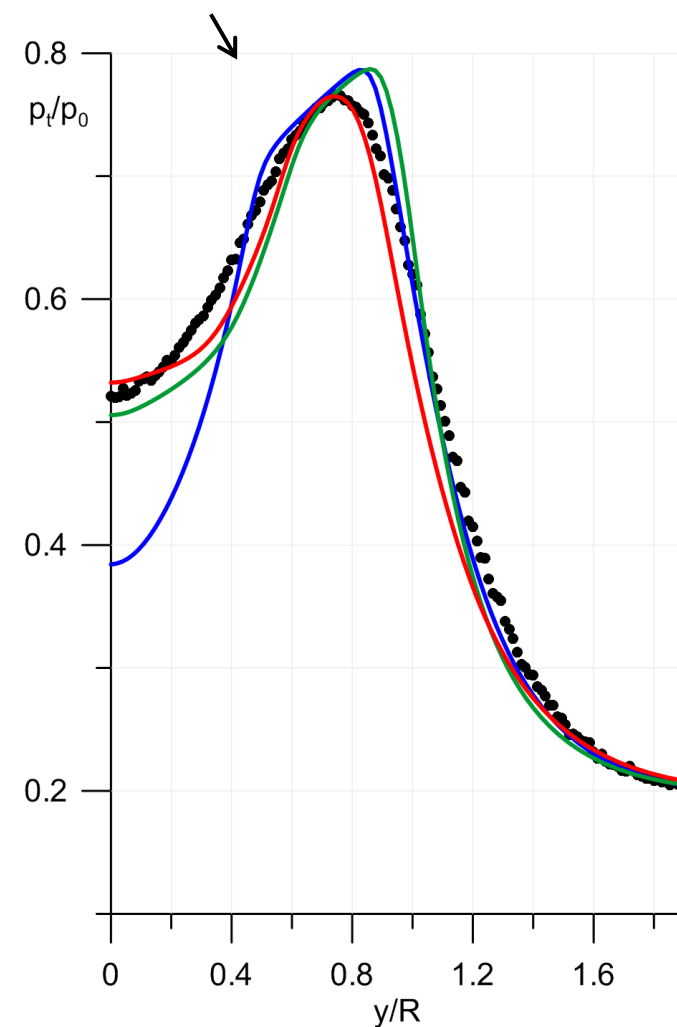
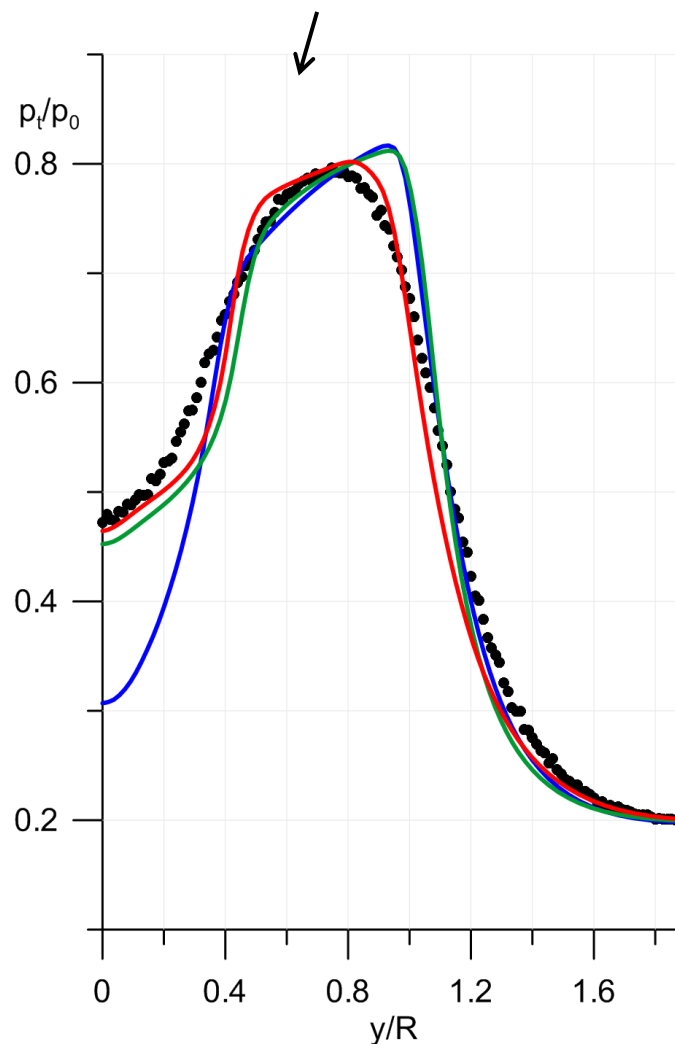
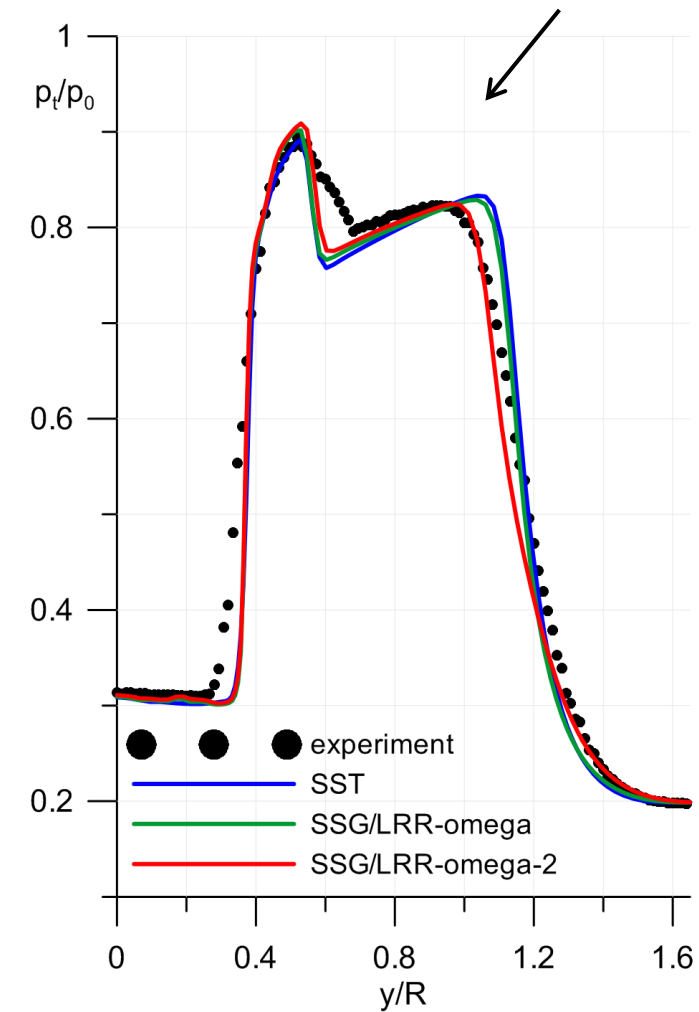
Струя NPR=5.0. Сравнение поперечных профилей давления Пито



$x/R = 3$

$x/R = 6$

$x/R = 9$



# Дальнейшие действия

1. Тестирование моделей класса DRSM в задачах, приближенных к практическим.
2. Накопление данных о работе различных моделей и их дальнейшая настройка под отдельные классы задач.
3. Оптимизация алгоритмов, реализующих модели класса DRSM.

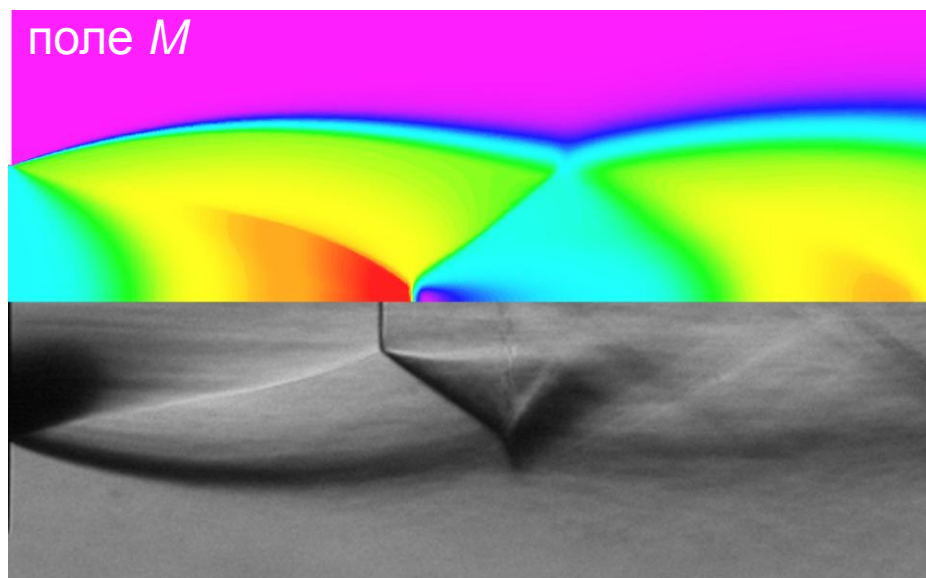


# Выводы

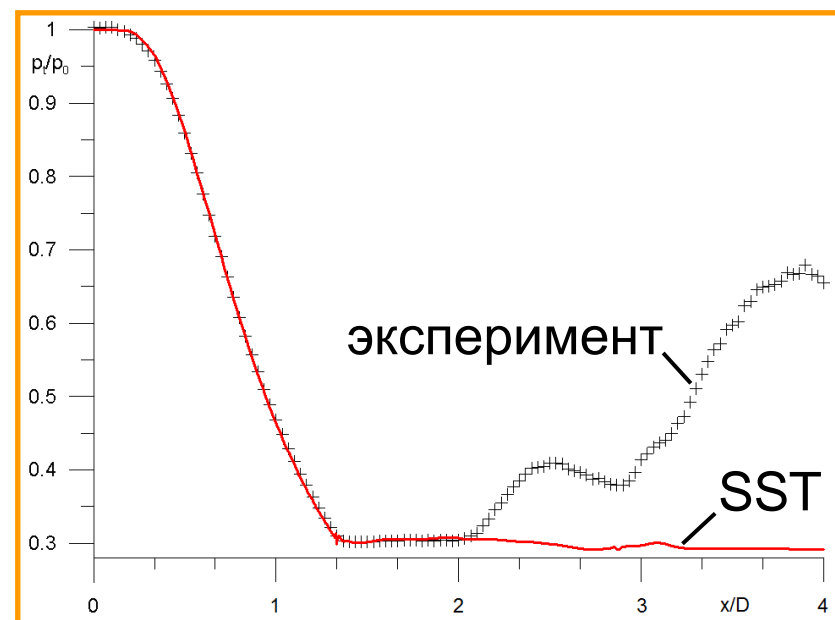
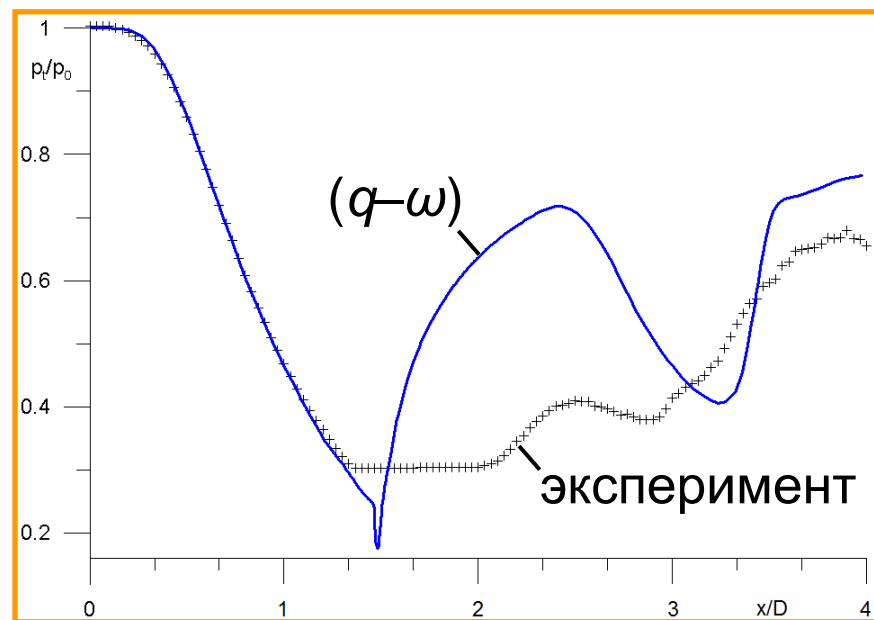
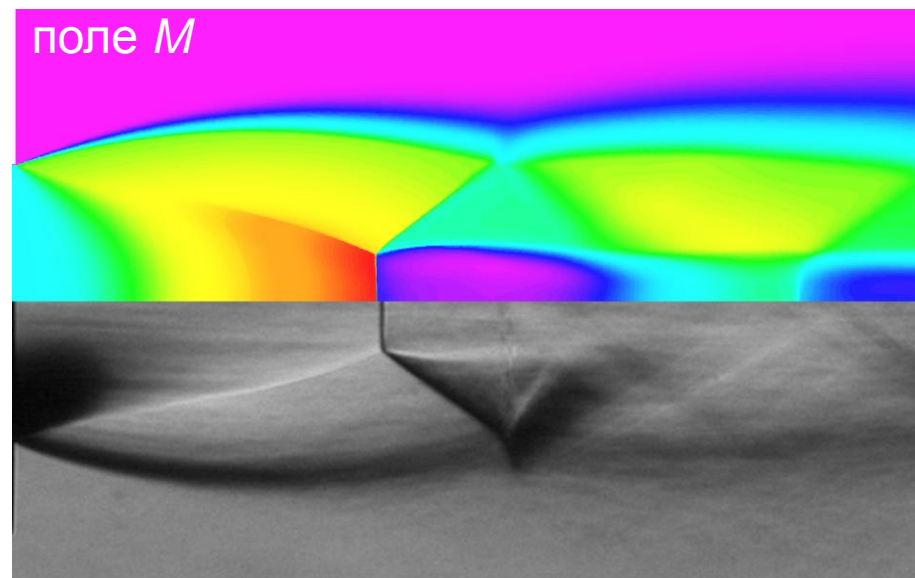
1. Модели турбулентности класса DRSM могут быть включены в существующие конечно-объемные схемы для решения системы уравнений Рейнольдса без существенных затруднений.
2. Стандартная дифференциальная модель для напряжений Рейнольдса SSG/LRR- $\omega$  позволяет получить **качественно правильное описание** осредненного течения в рассмотренных струях. В сверхзвуковой струе с нерегулярным отражением скачков уплотнения уточнено описание течения за диском Маха по сравнению с моделью турбулентности SST.
3. На примере модели SSG/LRR- $\omega$ -2 показано, что модели класса DRSM обладают потенциалом для достижения **количественного** согласования с экспериментальными данными в описании сверхзвуковых струй.

# Расчеты по моделям $(q-\omega)$ и SST

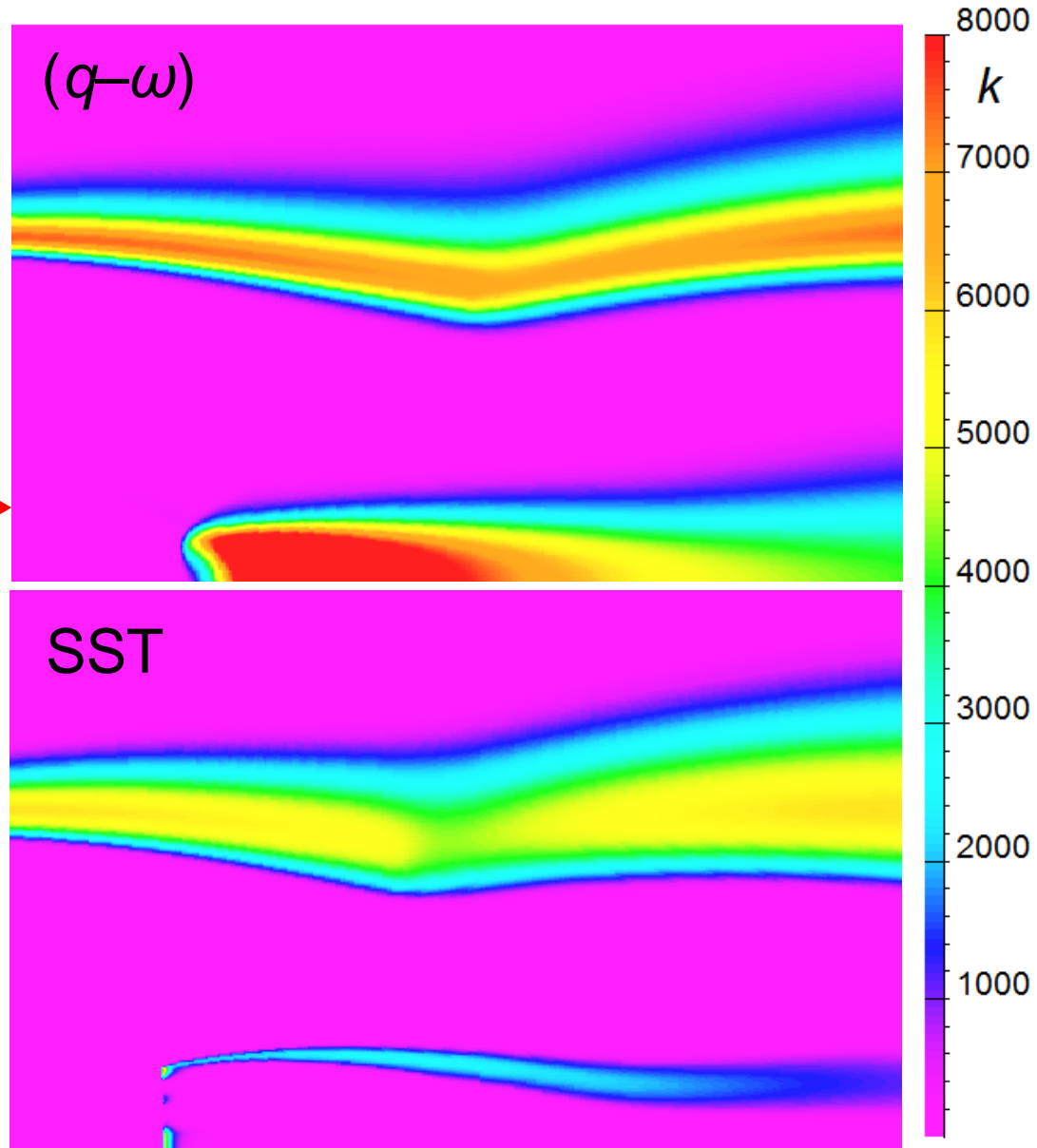
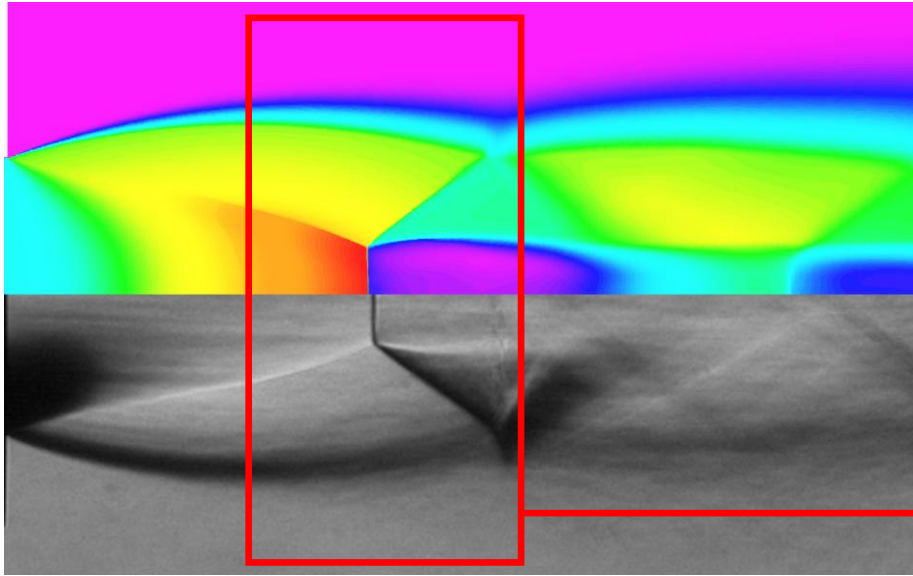
модель  $(q-\omega)$



модель SST



Поведение  $k = \frac{\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}}{2}$  в расчетах



- $(q-\omega)$ : перепроизводство турбулентности за диском Маха
- SST: замедленное развитие турбулентности за диском Маха

# Производство $k$ в буссинесковых моделях

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho k u_j - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t^k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \rho \cdot (\boxed{P} - \varepsilon)$$

← производство  $k$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho \omega u_j - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t^\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \rho \cdot \frac{\omega}{k} \cdot (C_{\omega 1} P - C_{\omega 2} \varepsilon)$$

$$\boxed{P = - \sum_{i,j} R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \quad \text{формула Буссинеска: } R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \cdot \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \text{div} \vec{V} \delta_{ij} \right)$$

Суммарное производство  $k$  на прямом скачке уплотнения:  $P = -R_{xx} \frac{du}{dx} \approx \frac{1}{3} \nu_t \left( \frac{du}{dx} \right)^2$

Суммарное производство в расчете:  $P_\Sigma = \frac{1}{3} \sum_{cells} \nu_{tj} \left( \frac{\Delta u_i}{h_i} \right)^2 \cdot h_i \sim \frac{C}{\langle h \rangle}$

- производство  $k$  на скачке зависит от шага сетки
- перепроизводство  $k$  на мелких сетках

Формула Буссинеска неприменима на скачках!

# Модификация производства $k$ в модели SST

$$\tilde{P} = \min(P, 10\varepsilon), \quad P = -\sum_{i,j} R_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

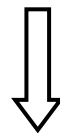
В областях больших градиентов скорости  $P \gg \varepsilon$

Суммарное производство на прямом скачке уплотнения в расчете:  $P_\Sigma = \frac{1}{3} \sum_{cells} 10\varepsilon \cdot h_i \sim C \langle h \rangle$

при измельчении сетки производство  $k$  стремится к 0

Для корректного описания производства  $k$  в областях неравновесной турбулентности требуется:

- точная формула для производства  $k$
- отказ от алгебраической связи между  $R_{ij}$  и  $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$



Дифференциальные модели для напряжений Рейнольдса (DRSM)

# Модель турбулентности класса DRSM

## Stress- $\omega$ (D. C. Wilcox, 2006)

$$\frac{\partial \rho R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho R_{ij} u_k - (\mu + \sigma^* \mu_t) \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \right] = \rho \cdot \left( P_{ij} + \Pi_{ij} - \frac{2}{3} \beta^* k \omega \delta_{ij} \right)$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \omega u_k - (\mu + \sigma \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] = \rho \cdot \frac{\omega}{k} \cdot (\alpha P - \beta k \omega) + \sigma_d \frac{\mu_t}{k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$$

$$P_{ij} = -R_{ik} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - R_{jk} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$$

- точные формулы для производства  $R_{ij}$  и  $k$
- $R_{ij}$  остаются конечными на скачке

Суммарное производство  $k$  на прямом скачке в расчете:

$$P_\Sigma = - \sum_{cells} R_{xx} \frac{\Delta u_i}{h_i} \cdot h_i \sim \langle R_{xx} \rangle \Delta u$$

Оно конечно и не зависит от шага сетки!



# Реализованные модели турбулентности класса DRSM (1)

**SST** – модель, основанная на гипотезе Буссинеска

2 дополнительных уравнения:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho k \bar{u}_k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] = \min(P, 10\varepsilon) - \varepsilon, \quad P = -\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad \varepsilon = \beta^* \rho k \omega$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \rho \omega \bar{u}_k - \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \right] = \frac{\gamma \rho}{\mu_t} P - \beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) 2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}$$

2 набора коэффициентов:

область	$\gamma$	$\beta$	$\beta^*$	$\sigma_k$	$\sigma_\omega$
пристенная	0.5532	0.075	0.09	2.0	2.0
свободнотурб.	0.4403	0.0828	0.09	1.0	1.168

$$C = C_{\text{wall}} F_1 + C_{\text{free}} (1 - F_1)$$

$$F_1 = \text{th}(\arg_1^4), \quad \arg_1 = \min \left( \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right), \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{\text{CD}_{k\omega} y^2} \right)$$

$$\text{CD}_{k\omega} = \max \left( 2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k}, 10^{-10} \right)$$

выражения для турбулентных потоков импульса:

$$\overline{\rho u'_i u'_j} = \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} - \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial u_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial u_i} - \frac{2}{3} \text{div} \bar{\vec{V}} \delta_{ij} \right)$$

$$\mu_t = \rho \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \sqrt{2} S F_2)}, \quad a_1 = 0.31, \quad F_2 = \text{th}(\arg_2^2), \quad \arg_2 = \max \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500\nu}{y^2 \omega} \right)$$

## Тест 4: струя, истекающая из двухконтурного сопла

- Воздух
- Холодные струи
- Осесимметричное сопло, отношение радиусов контуров 2.16
- Число Маха на срезе: 1 (внеш.), 0.8 (внут.)
- Режим NPR: 2.25 (внеш.), 1.72 (внут.)
- Регулярное отражение скачков уплотнения
- Входной уровень турбулентности  $Tu < 1\%$

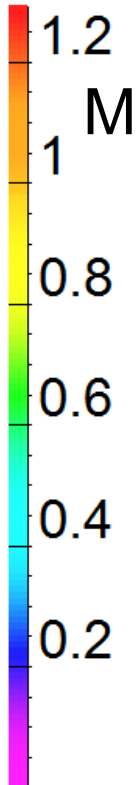
Постановка расчета:

свободные  
границы  
(внешнее течение  $M=0.01$ )

стенки – с прилипанием  
потока

втекание; заданы  $P_0$ ,  $T_0$  и  
параметры турбулентности

ось струи



## Сходимость по сетке

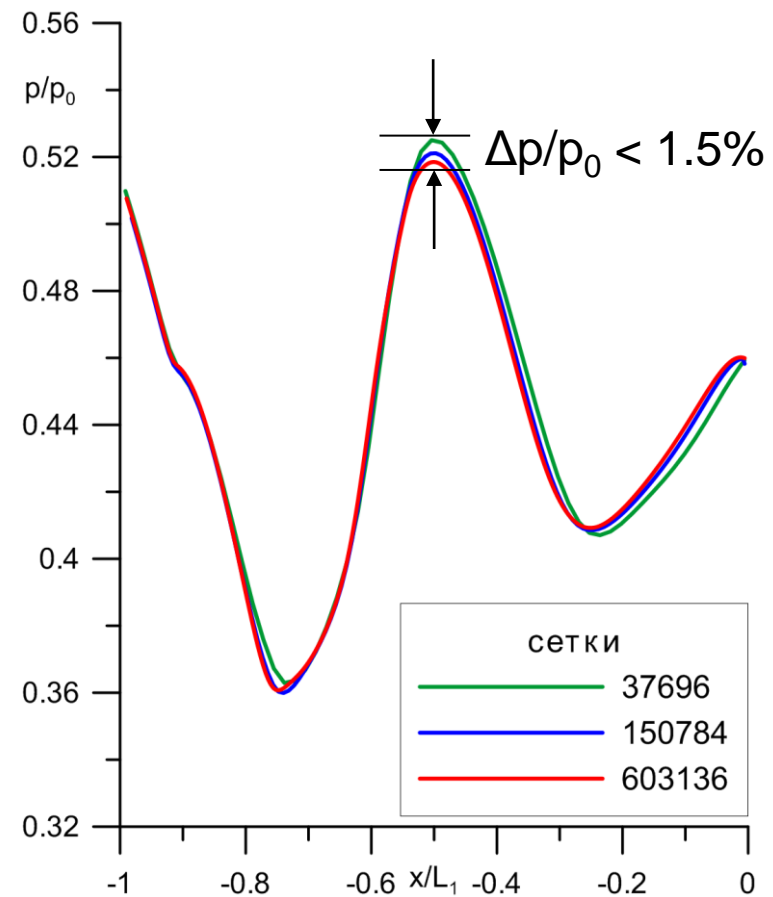
3 вложенных расчетных сетки:

37 696 ячеек

150 784 ячейки

603 136 ячеек

Распределение стат. давления по внешней поверхности обечайки первого контура (модель SST):



- Отличия между грубой и подробной сетками в пределах 1.5%
- Отличия между средней и подробной сетками в пределах 0.5%

# Сравнение осевых распределений и поперечных профилей давления Пито

