Центральный институт авиационного
моторостроения имени П.И. Баранова

Программа мультиточных вычислений. Версия 2021 года.

Ю.П. Федорченко, **Г.С. Чащин**, В.А. Шорстов.

Постановка задачи:

- Ширина абсорбирующего слоя – 50 ячеек
- Кинематическая вязкость ~10^(-5)

Исследуемые явления:

- Распространение бегущей волны
- Дифракция волн
  - Дифракция Френеля
  - Дифракция Фраунгофера
  - Геометрическое приближение
- Интерференция волн
- Вязкая диссипация

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u_\gamma}{\partial x_\gamma} + u_\gamma \frac{\partial \rho}{\partial x_\gamma} = 0$$

$$\rho \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + \rho u_\beta \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} = \rho \nu \Delta u_\alpha$$

$$u_\alpha = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial x_\alpha} \qquad \frac{\partial^2 \varphi_\nu}{c_s^2 \partial t^2} - \Delta \varphi_\nu = \frac{\nu}{c_s^2} \frac{\partial \Delta \varphi_\nu}{\partial t}$$

$$\psi_\nu = \varphi_\nu e^{-i\omega t} \qquad \Delta \psi_\nu + \left(\frac{k}{\sqrt{1 - i \frac{\omega \nu}{c_s^2}}} \right)^2 \psi_\nu = 0 \qquad \Delta \psi_\nu + \left(k \sqrt{1 + i \frac{\omega \nu}{c_s^2}} \right)^2 \psi_\nu = 0$$

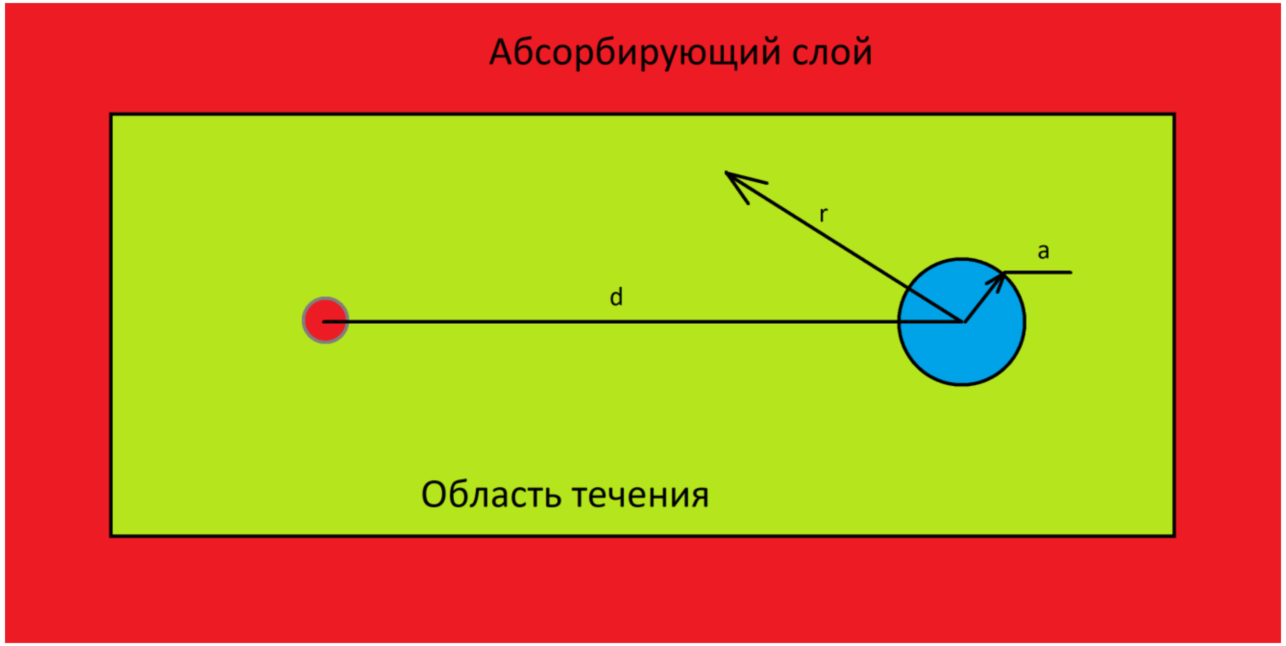

Рис 1. – Геометрия задачи

СТЕПЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

$$J, Y, H, \widetilde{H}$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \wedge \forall n \in \mathbb{Z} \rightarrow J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m},$$

$$\Xi = \qquad \pi Y_n(z) = 2\left(\gamma_{EM} + ln\frac{z}{2}\right) J_n(z) - \left(\frac{2}{z}\right)^n \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-1-m)!}{m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} -$$

$$-\left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+m}\right),$$

$$H_n(z) = J_n(z) + iY_n(z), \widetilde{H}_n(z) = J_n(z) - iY_n(z)$$

Пространство бесселевых функций

$$\gamma_{EM} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} \approx 0{,}577$$

Постоянная Эйлера-Маскерони

ПЕРВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МЕЙССЕЛЯ

$$\forall n \in \mathbb{Z} \wedge \forall z \in \mathbb{C} \mid |z| \sim 1$$

$$J_n(nz) = \frac{(nz)^n \exp\left(n\sqrt{1-z^2}\right) \exp(-V(z))}{e^n n!\,(1-z^2)^{1/4}\left(1+\sqrt{1-z^2}\right)^n}$$

$$Y_n(z) = \frac{e^n (n-1)!\left(1+\sqrt{1-z^2}\right)^n \exp(W(z))}{\pi (nz)^n (1-z^2)^{1/4} \exp\left(n\sqrt{1-z^2}\right)}$$

$$\mathrm{V(z)} = \sum_{m=1}^{\infty} U_m(z)\,, W(z) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1}\, U_m(z)$$

$$U_m(z) = \frac{P_m(z^2)}{Q_{3m}\left(\sqrt{1-z^2}\right)} + r_m;$$

$$P, Q - \text{полиномы}, r_m = const$$

Границы вычислительной пригодности

$$100 \le n \le 300\,, |z| < 0{,}1n$$
$$300 \le n \le 600, |z| < 0{,}3n$$
$$600 \le n \le 1000, |z| < 0{,}5n$$
$$1000 \le n \le 3000, |z| < 0{,}6n$$

РАЗЛОЖЕНИЕ ЛОММЕЛЯ

$$\forall F \in \Xi \wedge \forall n \in \mathbb{Z} \wedge \forall z, t \in \mathbb{C} \mid |t| < 1 \longrightarrow F_n\left(z\sqrt{1+t}\right) = (1+t)^{n/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{tz}{2}\right)^m}{m!} F_{n+m}(z)$$

Замена переменной: $\lambda = \sqrt{1+t}$ или $t = \lambda^2 - 1, |\lambda^2 - 1| < 1$

Теорема умножения бесселевых функций:

$$F_n(\lambda z) = \lambda^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\lambda^2 - 1)^m \left(\frac{1}{2} z\right)^m}{m!} F_{n+m}(z)$$

ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ НЕЙМАНА

$$\forall F \in \Xi \;\wedge\; \forall n \in \mathbb{Z} \;\wedge\; \forall Z, z \in \mathbb{C} \;\wedge\; \forall \theta \in [-\pi; \pi) \subset \mathbb{R} \mid \left|z e^{i\theta}\right| < |Z|$$

$$F_n\left(\sqrt{Z^2 + z^2 - 2zZcos\theta}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} F_{n+m}(Z) J_m(z) e^{i\theta}$$

В частности,

$$H_0\left(\sqrt{Z^2 + z^2 - 2zZcos\theta}\right) = H_0\,(Z) J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} H_n(Z) J_n(z) \cos(n\theta)$$

ЯВЛЕНИЕ СТОКСА

Ветвление бесселевых функций:

$$\forall F \in \Xi \ \land \ \forall n \in \mathbb{Z} \ \land \ \forall z \in \mathbb{C} \ \land \ \forall \theta \in \mathbb{R} \ \rightarrow \ F_n\left(ze^{i\theta}\right) = e^{-i\theta} F_n(z)$$

$$!\exists \left\{A_{n,m}(z), R_{n,m}(z)\right\} \quad | \quad F_n(z) = \sum_{m=1}^{M} A_{n,m}(z) + R_{n.M}(z), \quad \text{тогда}$$

$$\sum_{m=1}^{M} A_{n,m}\left(ze^{i\theta}\right) + R_{n.M}\left(ze^{i\theta}\right) = e^{-i\theta} \sum_{m=1}^{M} A_{n,m}(z) + e^{-i\theta} R_{n.M}(z)$$

НЕВЯЗКОЕ РЕШЕНИЕ

$$\rho' = Q\left[H_0(kd)J_0(kr) - H_0(kd)\frac{J'_0(ka)}{H'_0(ka)}H_0(kr) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n(kd)J_n(kr) - H_n(kd)\frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)}H_n(kr)\right)\cos(n\theta)\right],$$

если $r < d$

$$\rho' = Q\left[H_0(kr)J_0(kd) - H_0(kr)\frac{J'_0(ka)}{H'_0(ka)}H_0(kd) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n(kr)J_n(kd) - H_n(kd)\frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)}H_n(kr)\right)\cos(n\theta)\right],$$

если $r < d$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ

$$\rho' = Q\left[H_0(k_\nu d)J_0(k_\nu r) - H_0(kd)\frac{J'_0(k_\nu a)}{H'_0(k_\nu a)}H_0(k_\nu r) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n(k_\nu d)J_n(k_\nu r) - H_n(k_\nu d)\frac{J'_n(k_\nu a)}{H'_n(k_\nu a)}H_n(k_\nu r)\right)\cos(n\theta)\right],$$

если $r < d$

$$\rho' = Q\left[H_0(k_\nu r)J_0(k_\nu d) - H_0(k_\nu r)\frac{J'_0(k_\nu a)}{H'_0(k_\nu a)}H_0(k_\nu d) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n(k_\nu r)J_n(k_\nu d) - H_n(k_\nu d)\frac{J'_n(k_\nu a)}{H'_n(k_\nu a)}H_n(k_\nu r)\right)\cos(n\theta)\right],$$

если $r < d$

$k_\nu = k\sqrt{1 + i\frac{\omega\upsilon}{c_s^2}}$, $\quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновые числа

ПРИБЛИЖЁННОЕ РЕШЕНИЕ

$$\rho' = Q\left[H_0(k_\nu d)J_0(k_\nu r) - H_0(kd)\frac{J'_0(ka)}{H'_0(ka)}H_0(k_\nu r) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n(k_\nu d)J_n(k_\nu r) - H_n(k_\nu d)\frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)}H_n(k_\nu r)\right)\cos(n\theta)\right],$$

если $r < d$

$$\rho' = Q\left[H_0(k_\nu r)J_0(k_\nu d) - H_0(k_\nu r)\frac{J'_0(ka)}{H'_0(ka)}H_0(k_\nu d) + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(H_n(k_\nu r)J_n(k_\nu d) - H_n(k_\nu d)\frac{J'_n(ka)}{H'_n(ka)}H_n(k_\nu r)\right)\cos(n\theta)\right],$$

если $r < d$

$$k_\nu = k\sqrt{1 + i\frac{\omega\upsilon}{c_s^2}}, \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ – волновые числа

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 600*300

$\lambda = 20, d = 300, a = 40$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}968$

$\infty = 300$

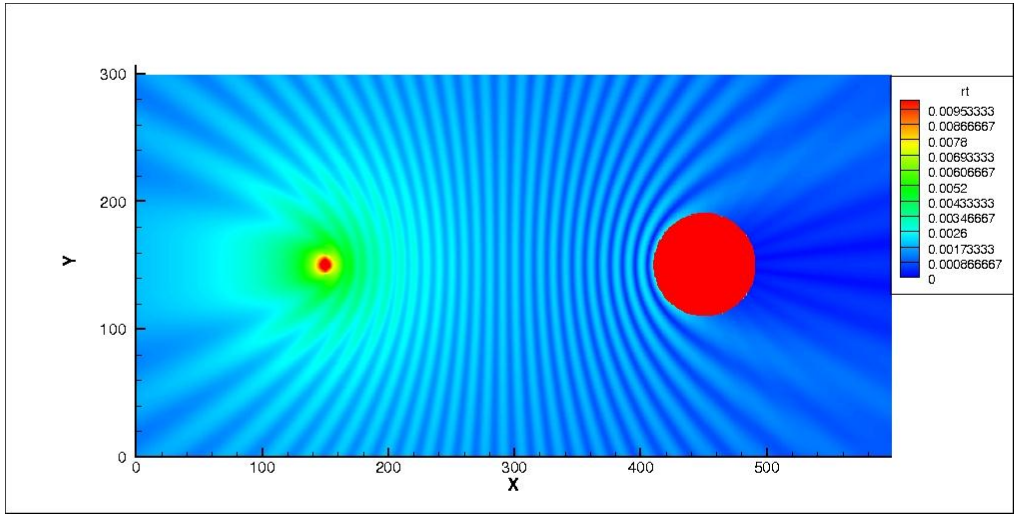

Рис 2. – Невязкое решение

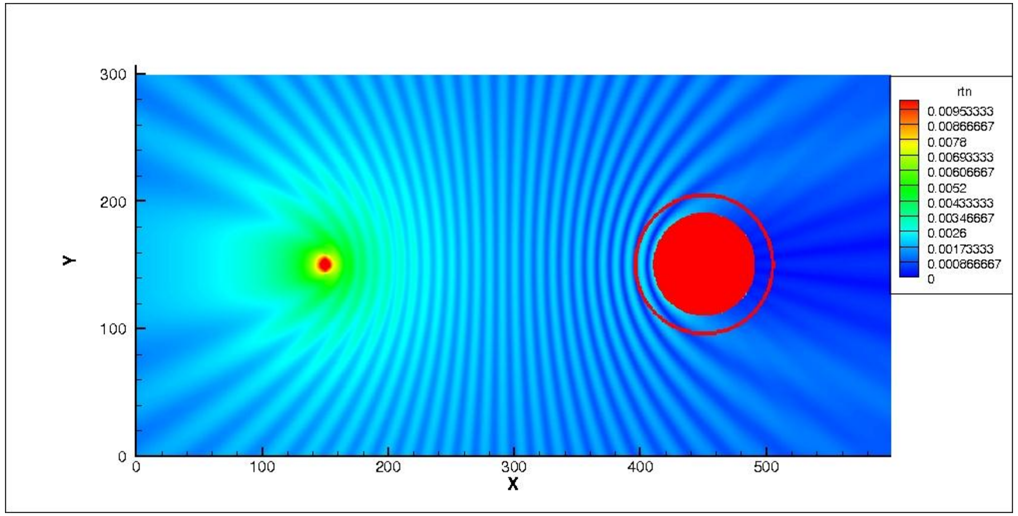

Рис 3. – Точное решение

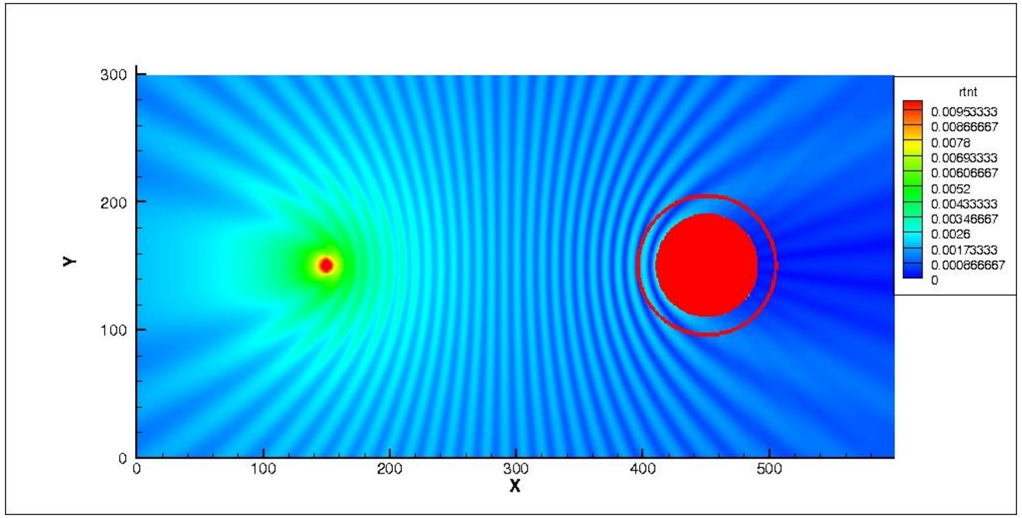

Рис 4. – Приближённое решение

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 600*300

$\lambda = 20, d = 300, a = 40$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}968$

$\infty = 300$

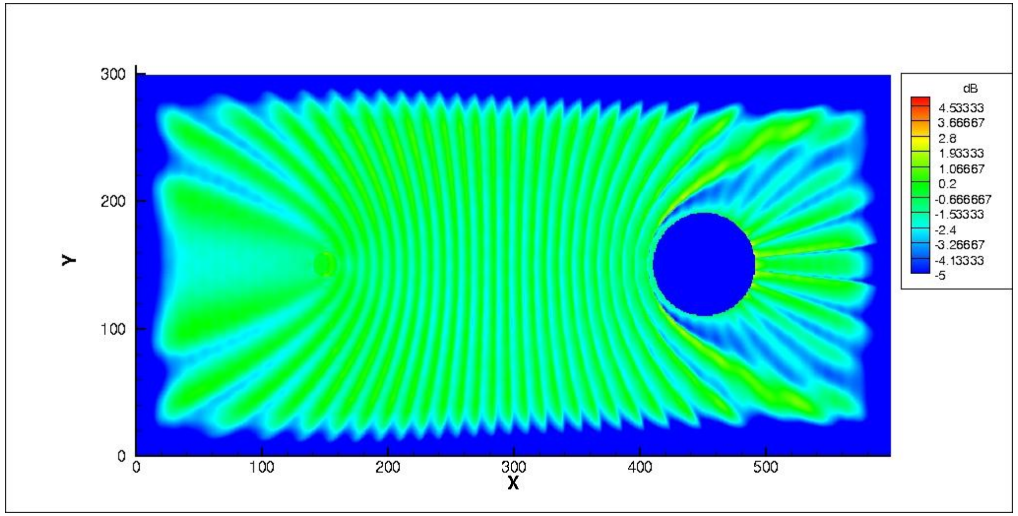

Рис 5. – Ошибки невязкого решения

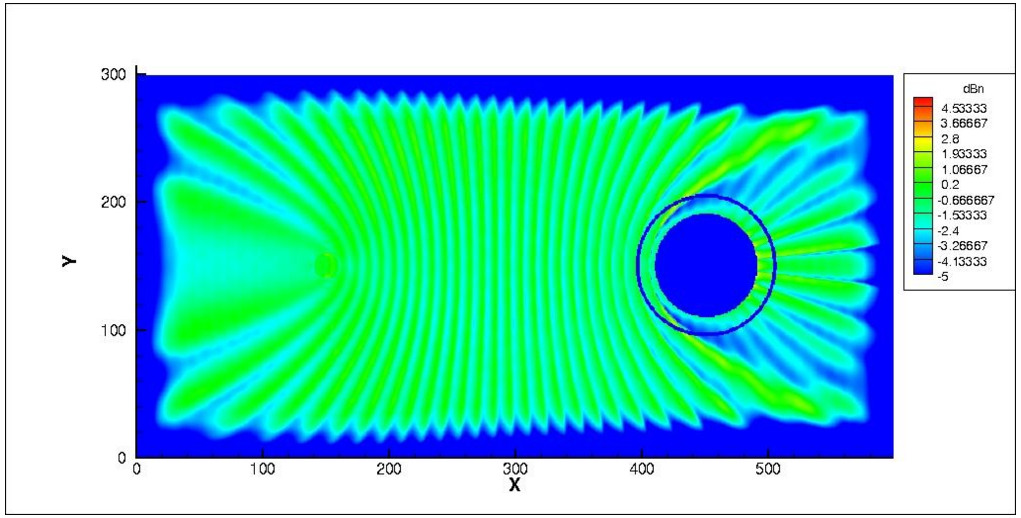

Рис 6. – Ошибки точного решения

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

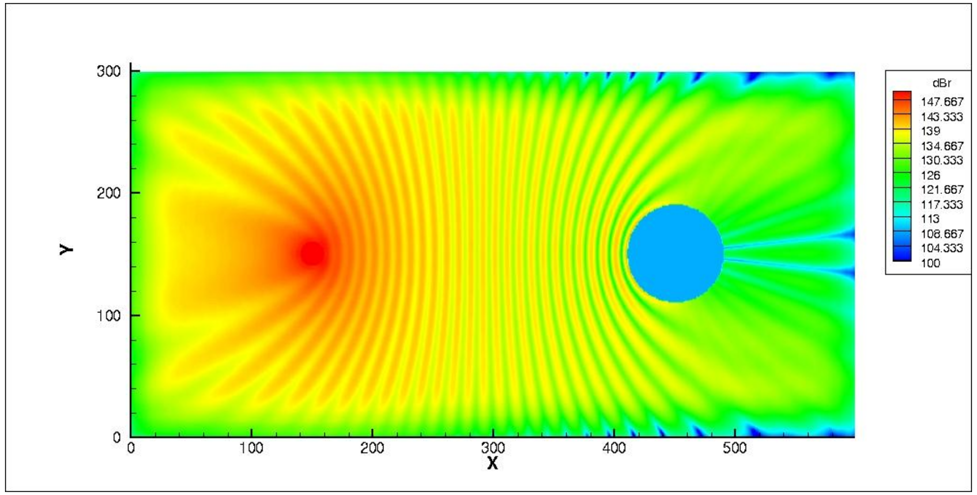

Рис 7. – Уровень шума численный

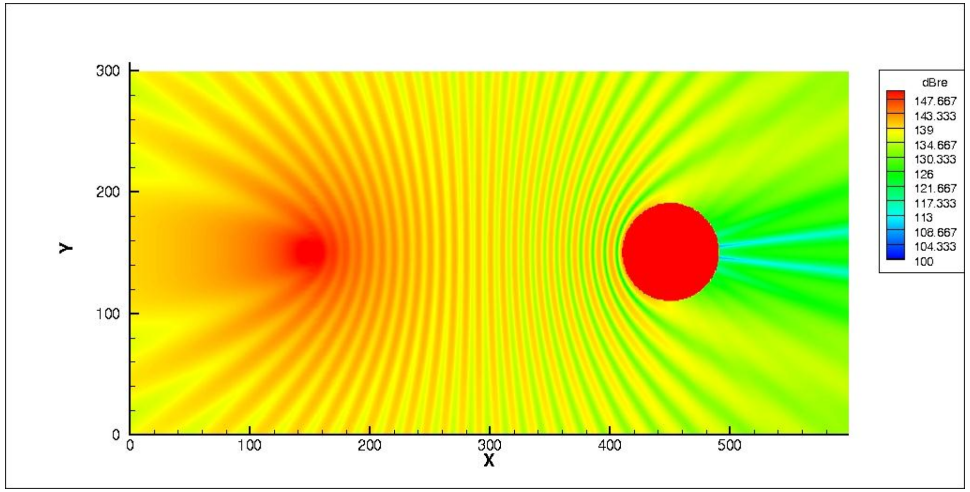

Рис 8. – Уровень шума невязкого решения

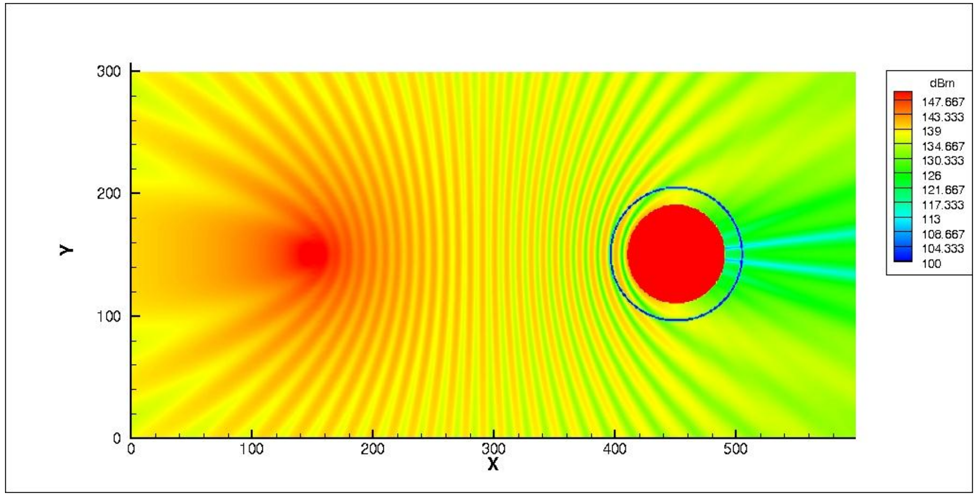

Рис 9. – Уровень шума точного решения

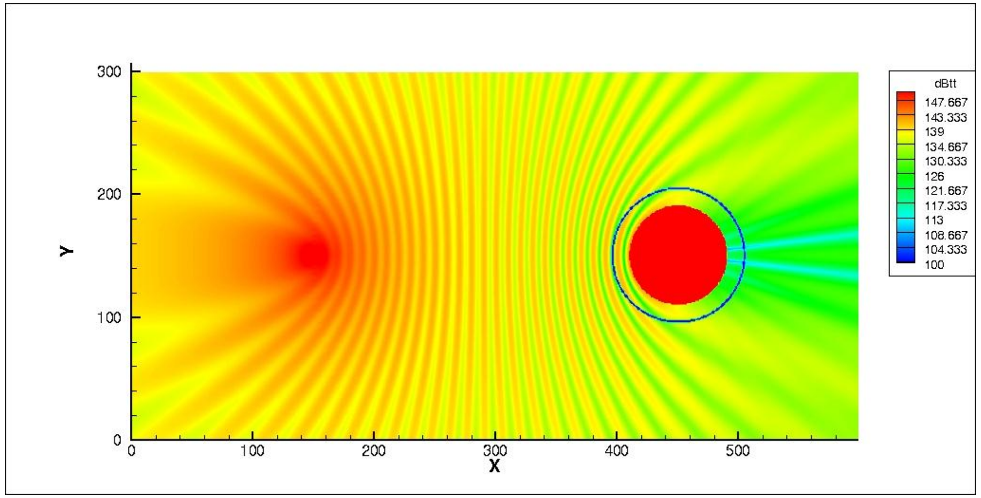

Рис 10. – Уровень шума приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 600*300

$\lambda = 20, d = 3000, a = 40$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}968$

$\infty = 300$

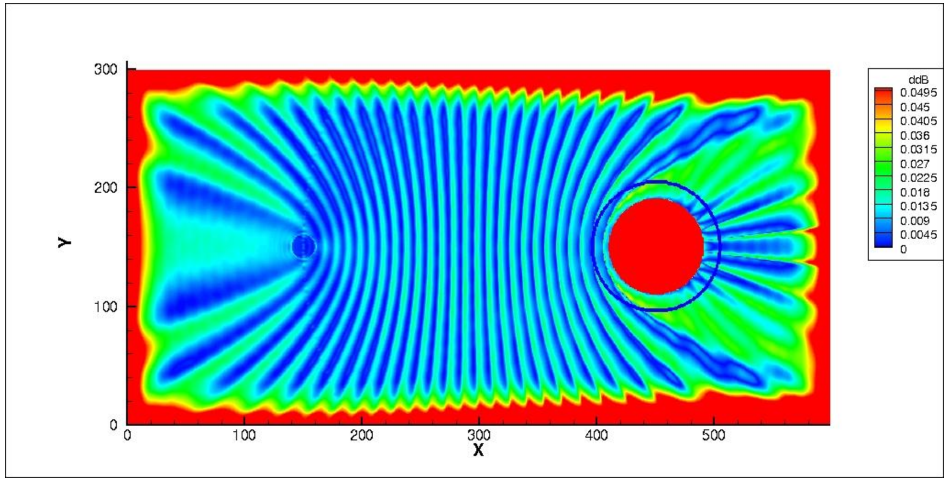

Рис 11. – Ошибки шума точного решения

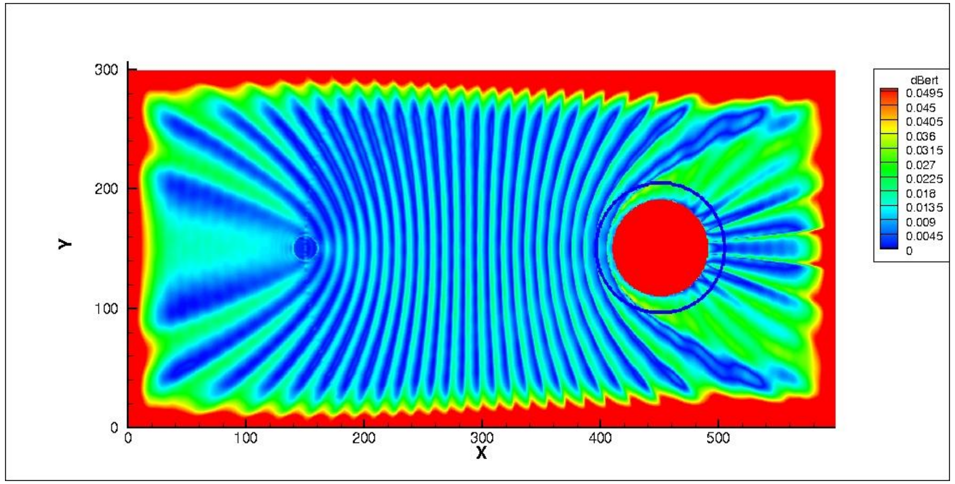

Рис 12. – Ошибки шума приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$$\lambda = 20, d = 600, a = 50$$

$$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 1{,}095$$

$$\infty = 100$$

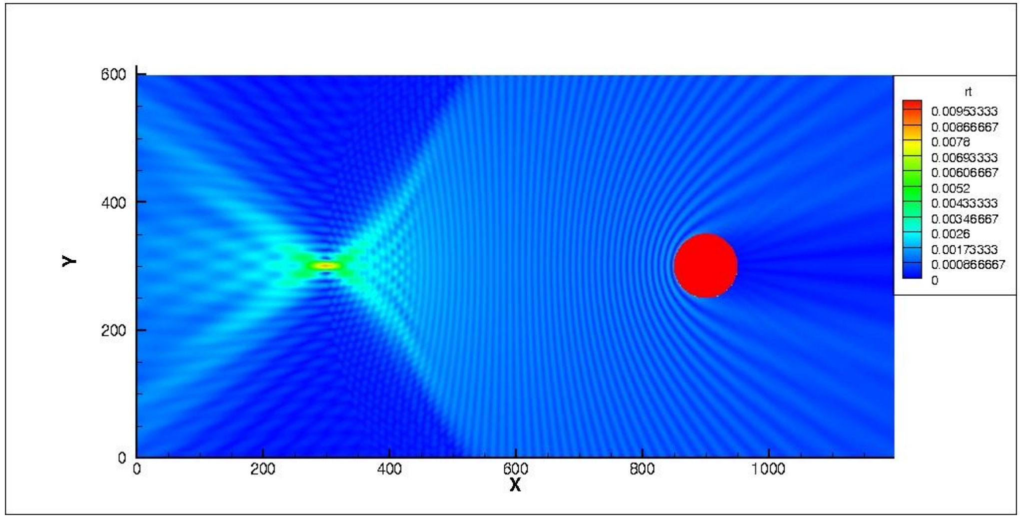

Рис 13. – Невязкое решение

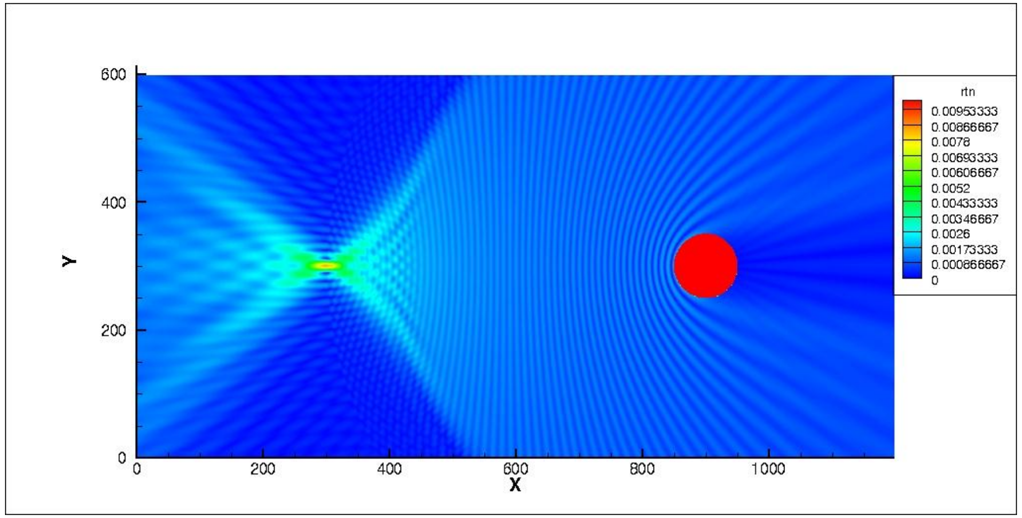

Рис 14. – Точное решение

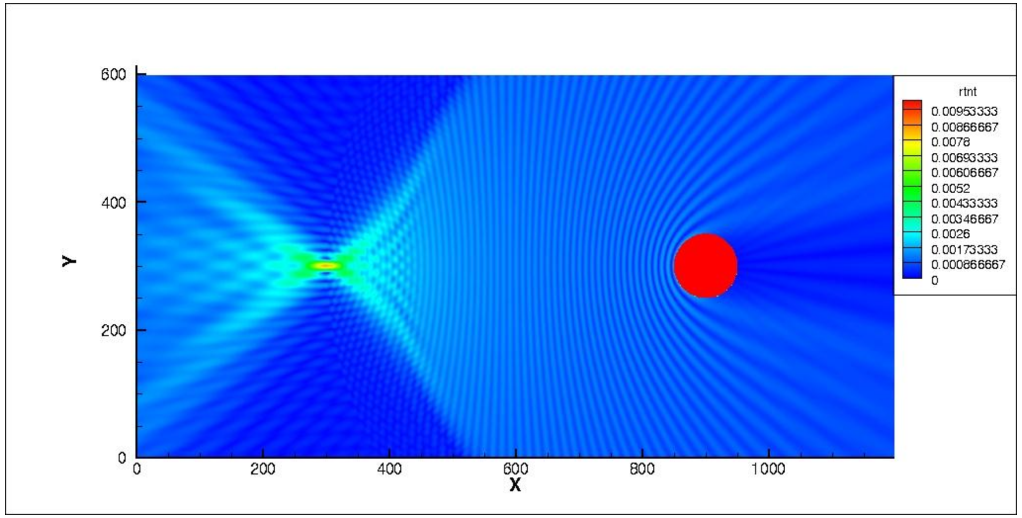

Рис 15. – Приближённое решение

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$$\lambda = 20, d = 600, a = 50$$

$$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 1{,}095$$

$$\infty = 100$$

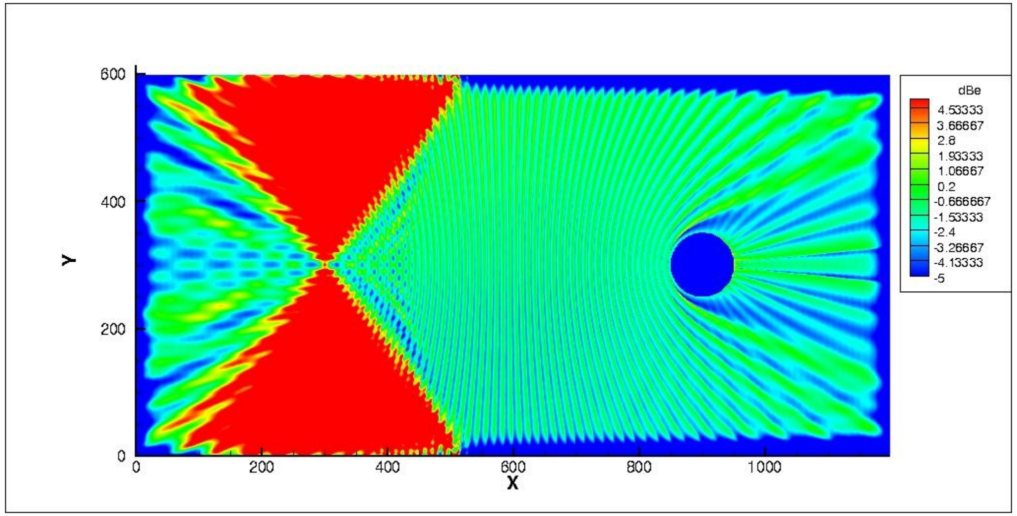

Рис 16. – Ошибки невязкого решения

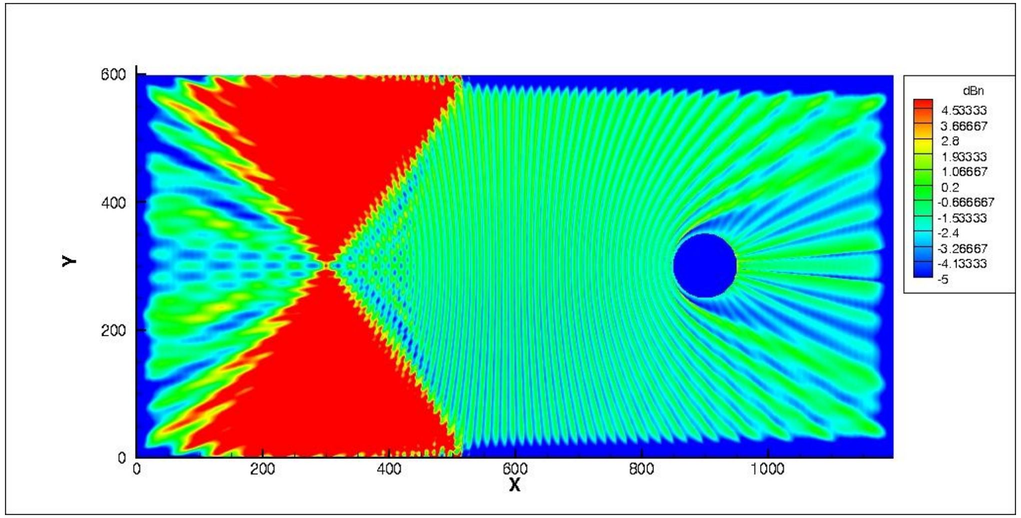

Рис 17. – Ошибки точного решения

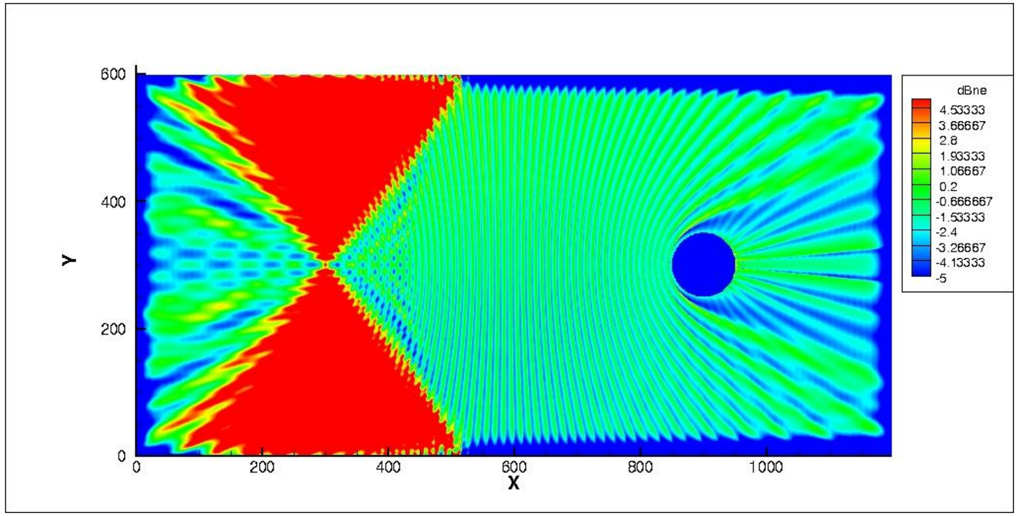

Рис 18. – Ошибки приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

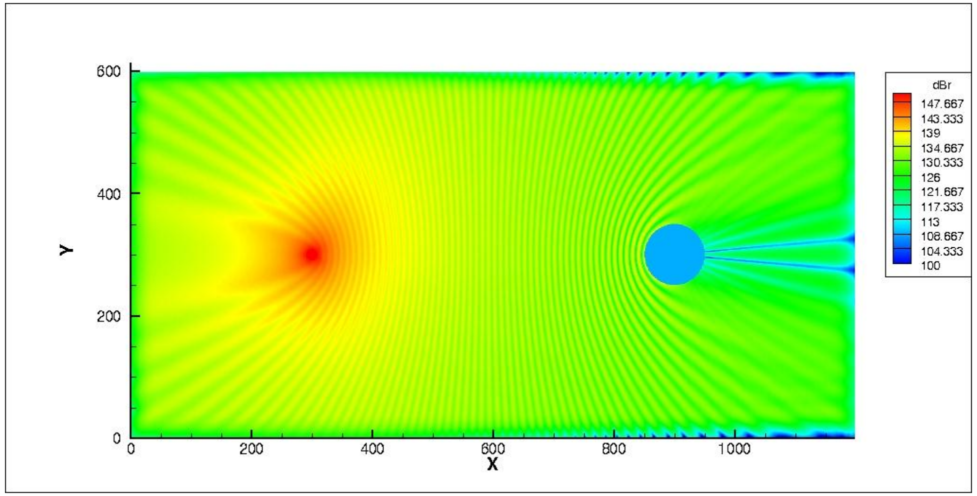

Рис 19. – Уровень шума численный

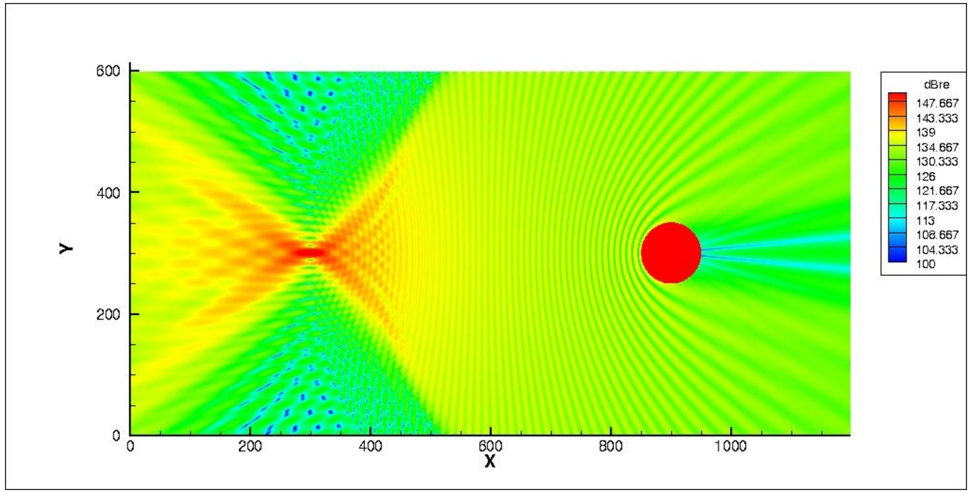

Рис 20. – Уровень шума невязкого решения

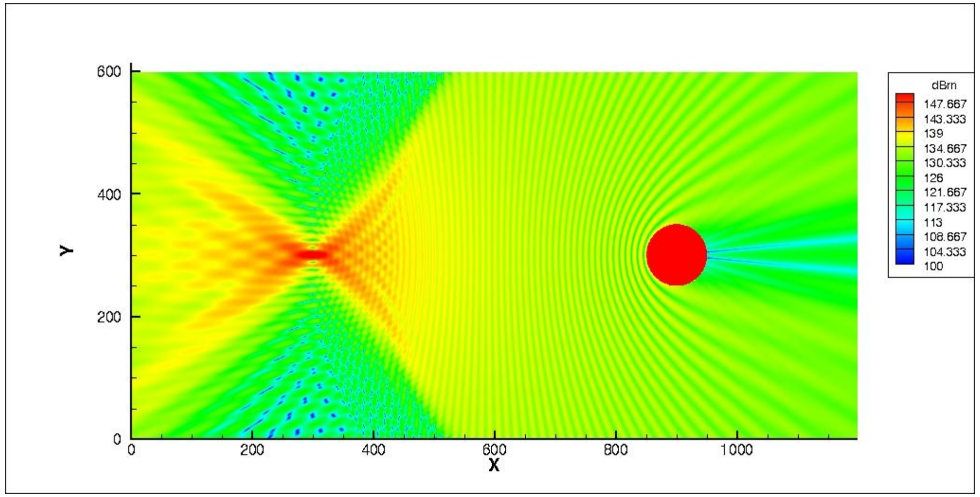

Рис 21. – Уровень шума точного решения

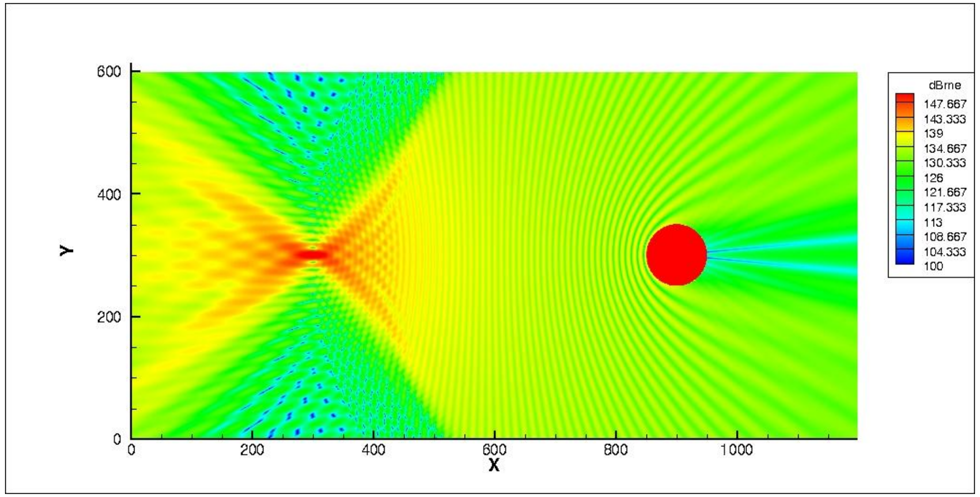

Рис 22. – Уровень шума приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 20, d = 600, a = 50$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 1{,}095$

$\infty = 100$

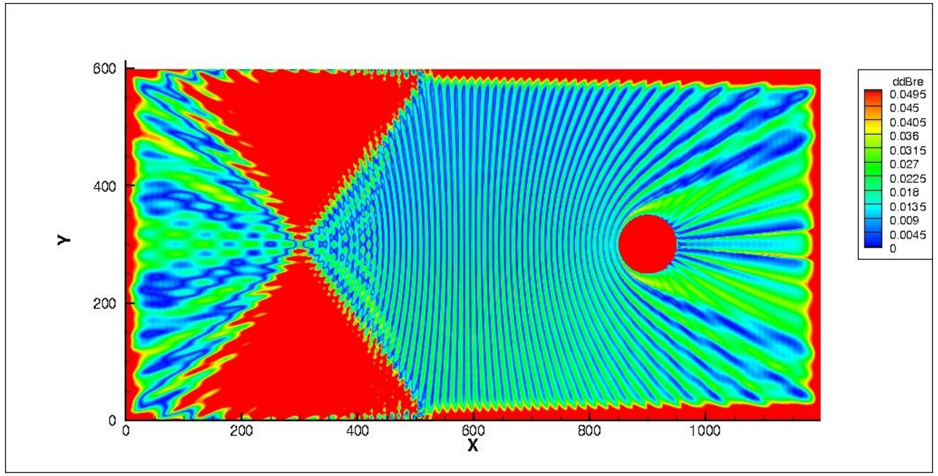

Рис 23. – Ошибки шума невязкого решения

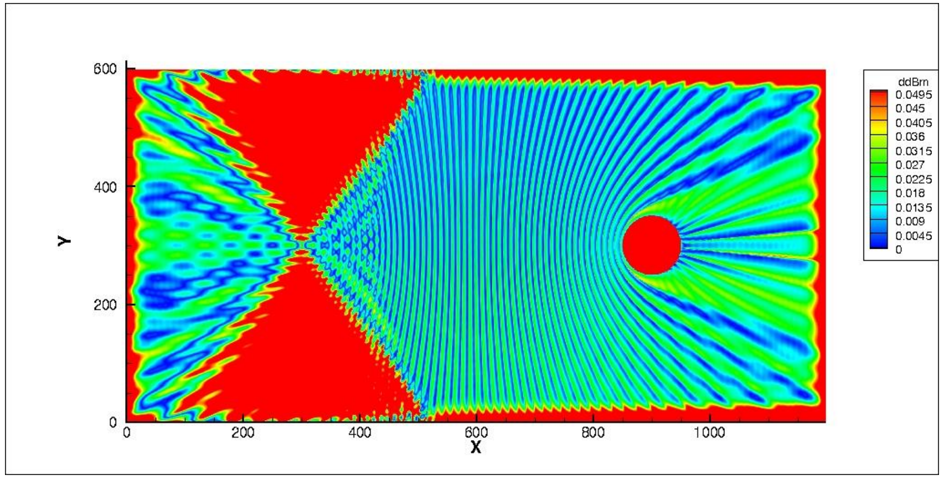

Рис 24. – Ошибки шума точного решения

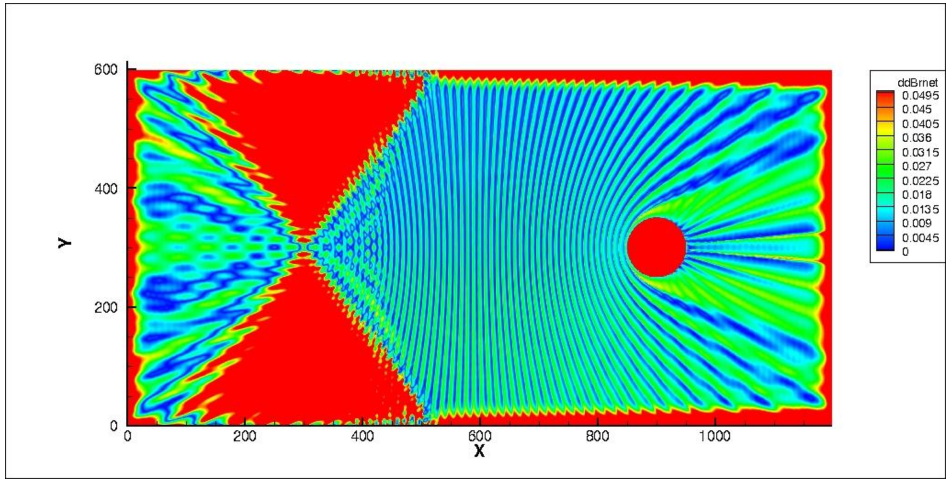

Рис 25. – Ошибки шума приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$$\lambda = 20, d = 240, a = 20$$

$$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 1{,}732$$

$$\infty = 200$$

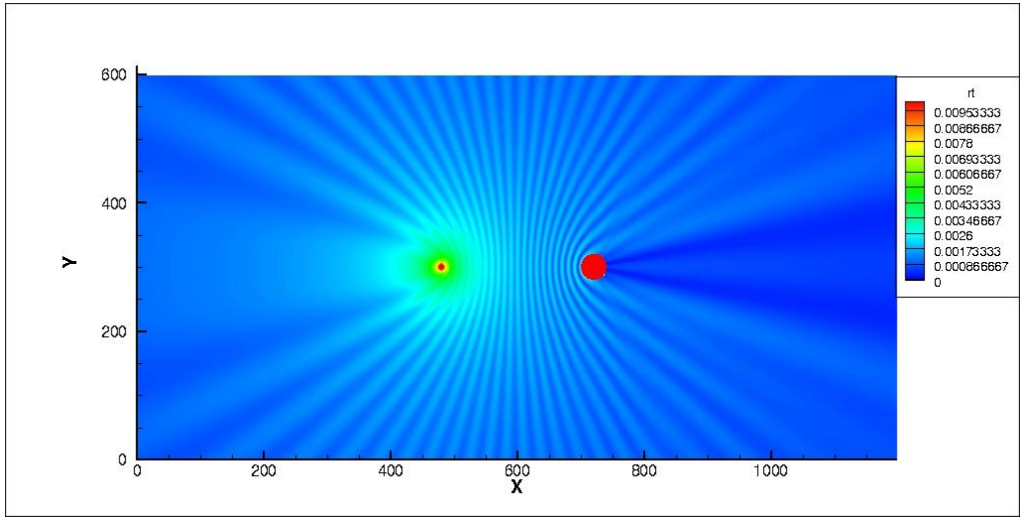

Рис 26. – Невязкое решение

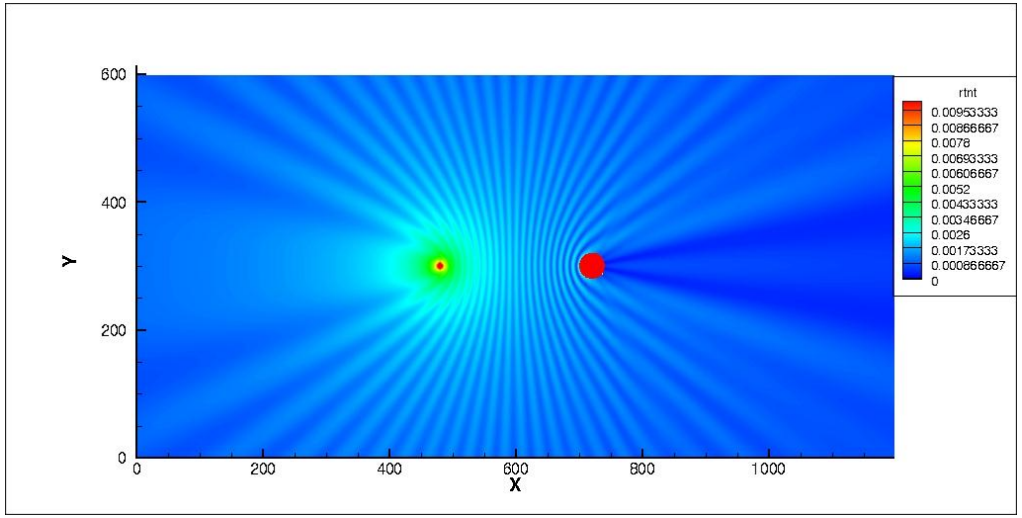

Рис 27. – Точное решение

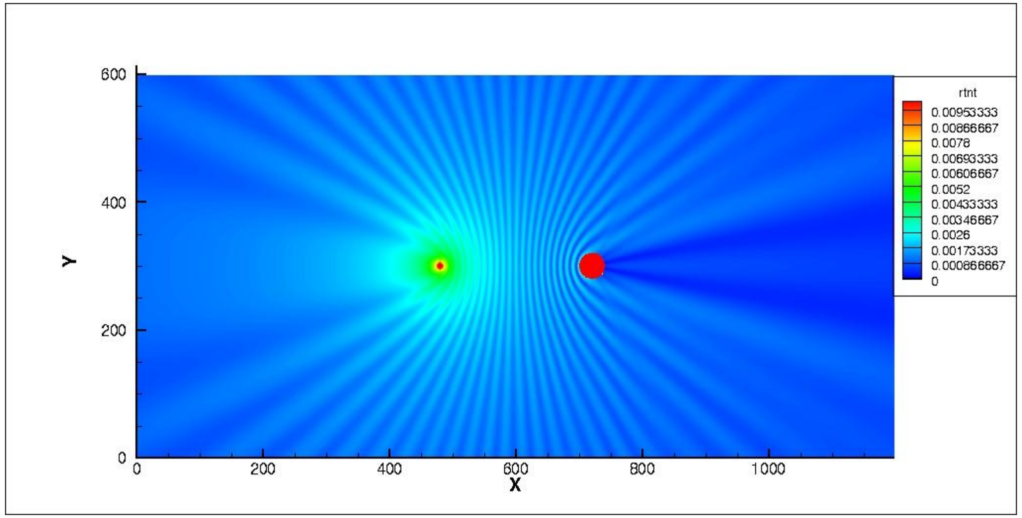

Рис 28. – Приближённое решение

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 20, d = 240, a = 20$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 1{,}732$

$\infty = 200$

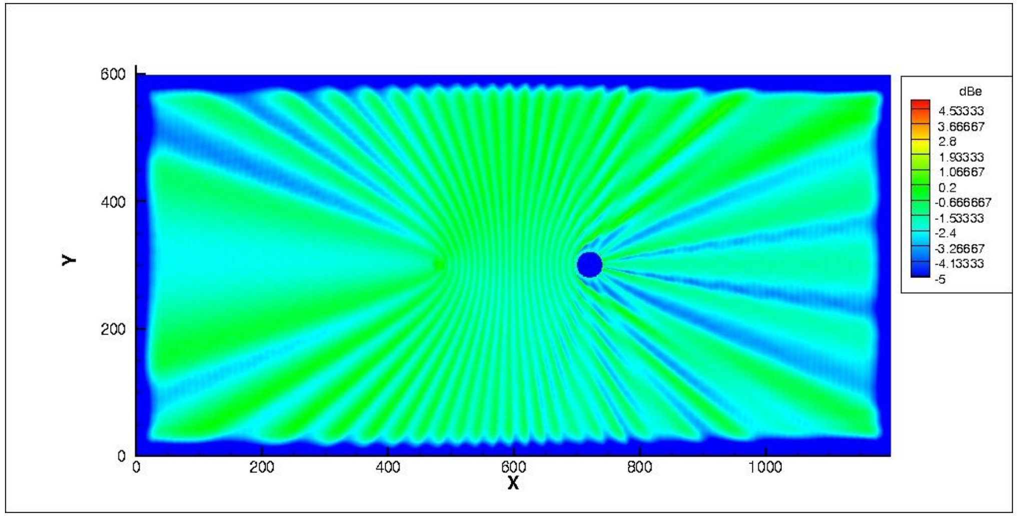

Рис 29. – Ошибки невязкого решения

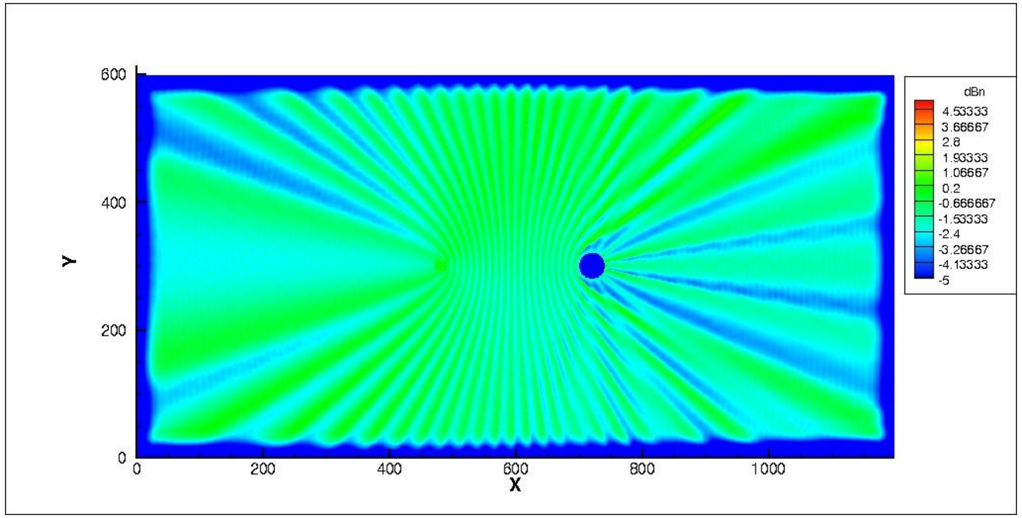

Рис 30. – Ошибки точного решения

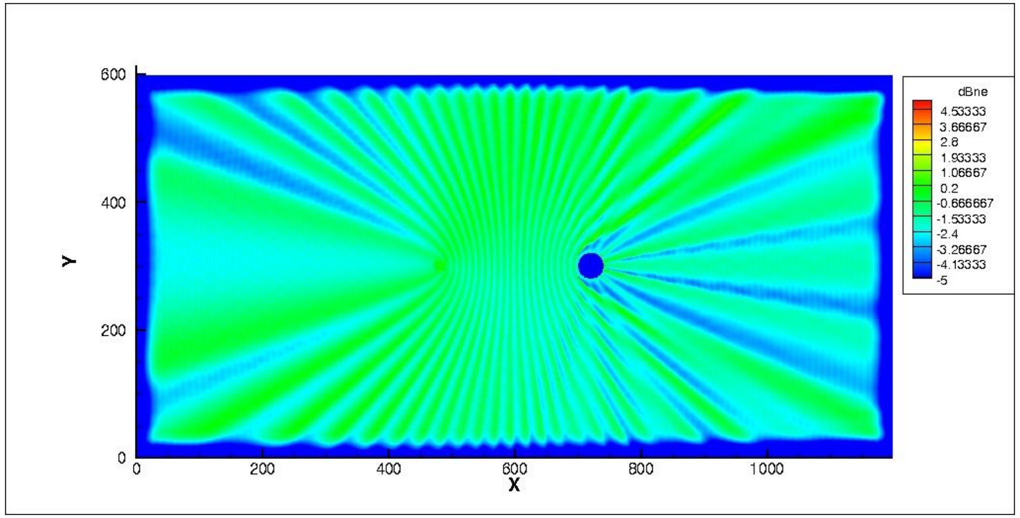

Рис 31. – Ошибки приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

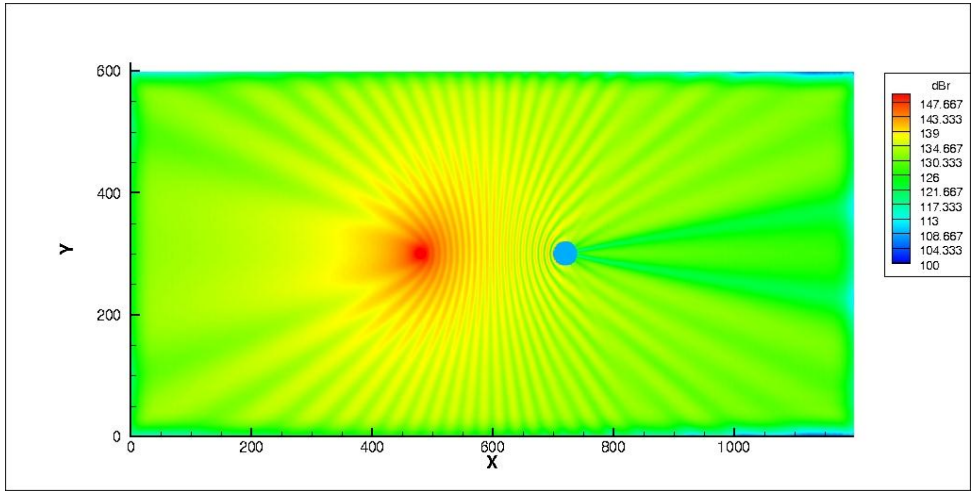

Рис 32. – Уровень шума численный

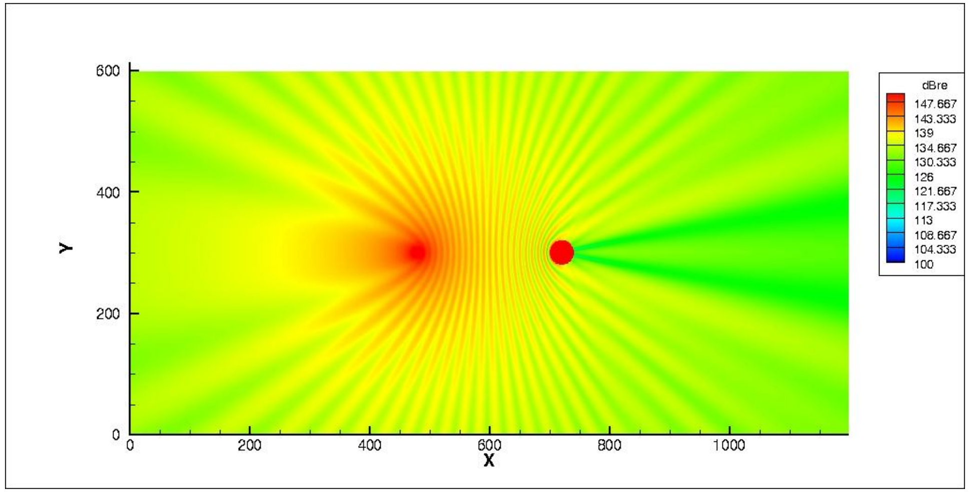

Рис 33. – Уровень шума невязкого решения

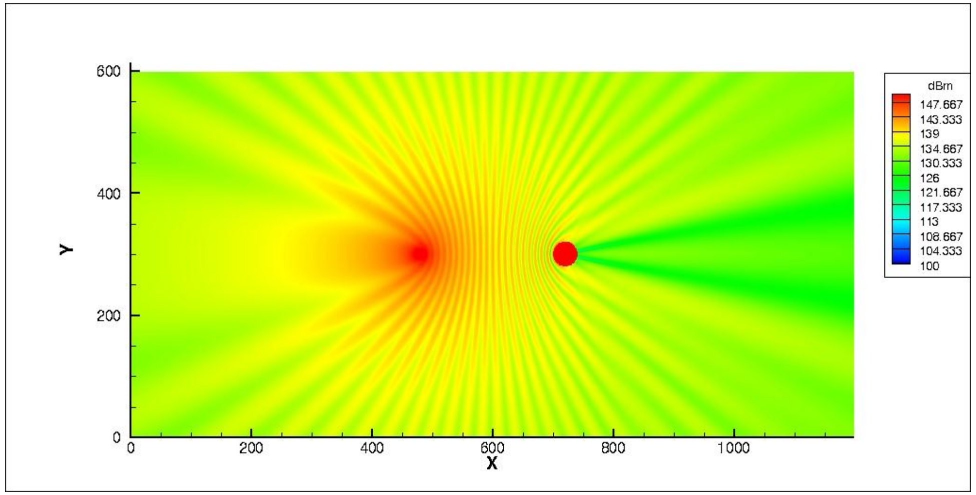

Рис 34. – Уровень шума точного решения

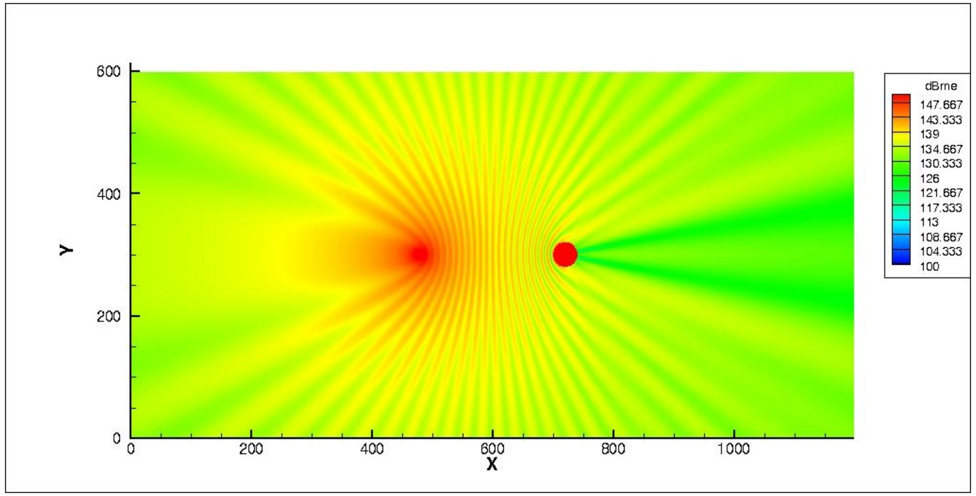

Рис 35. – Уровень шума приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 20, d = 240, a = 20$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 1{,}732$

$\infty = 200$

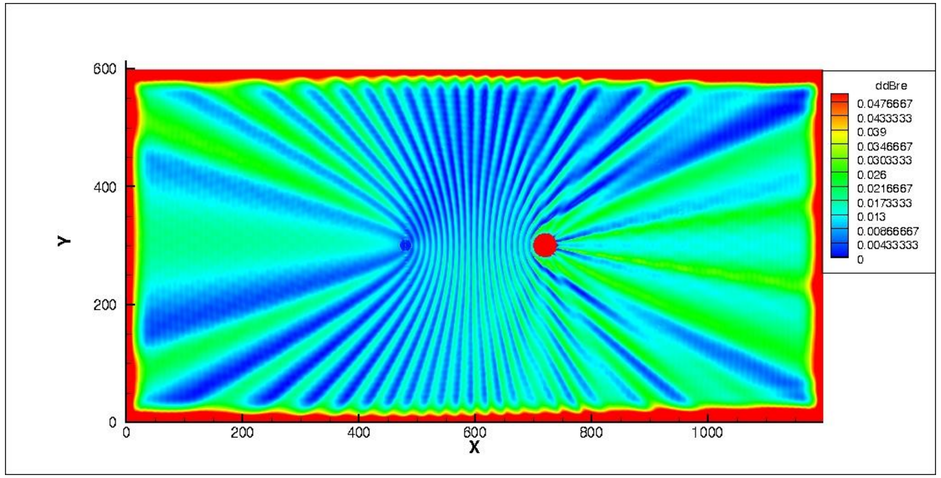

Рис 36. – Ошибки шума невязкого решения

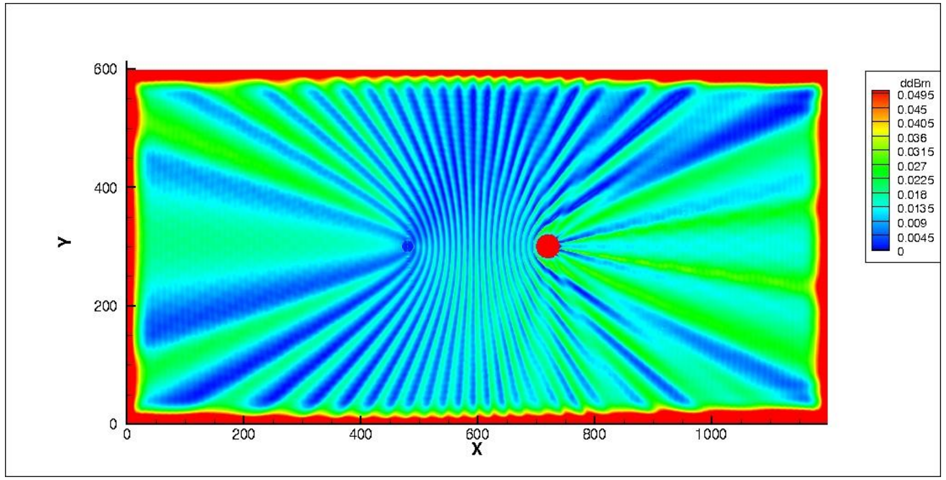

Рис 37. – Ошибки шума точного решения

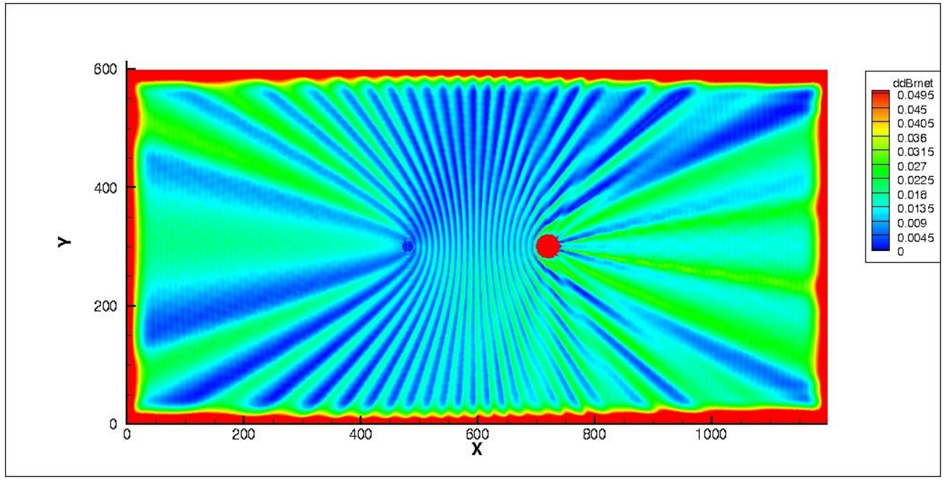

Рис 38. – Ошибки шума приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 80, d = 120, a = 5$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 9{,}798$

$\infty = 150$

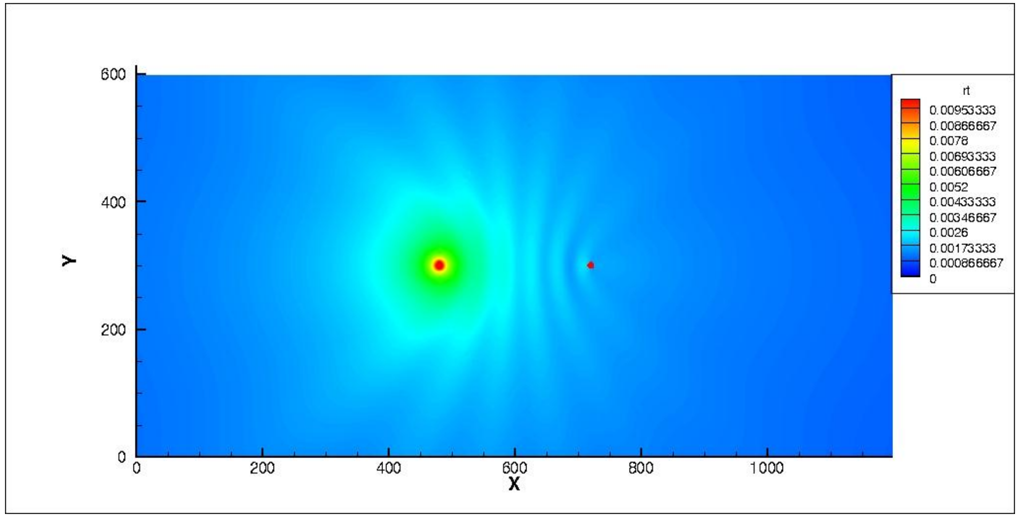

Рис 39. – Невязкое решение

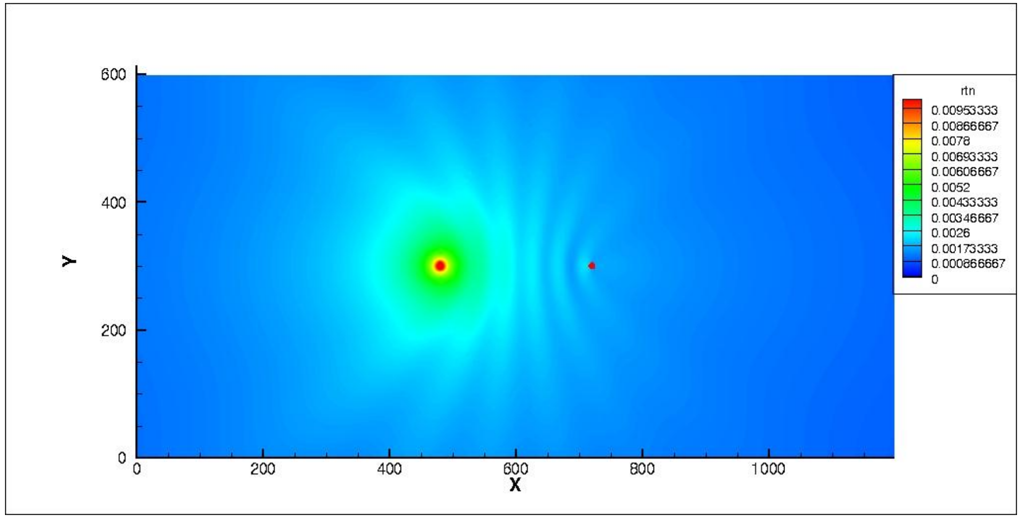

Рис 40. – Точное решение

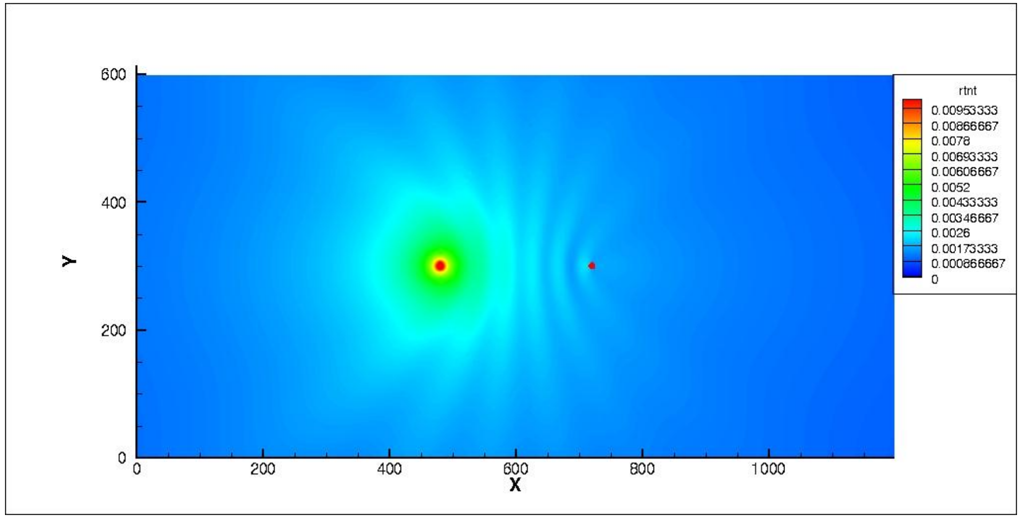

Рис 41. – Приближённое решение

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 80, d = 120, a = 5$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 9{,}798$

$\infty = 150$

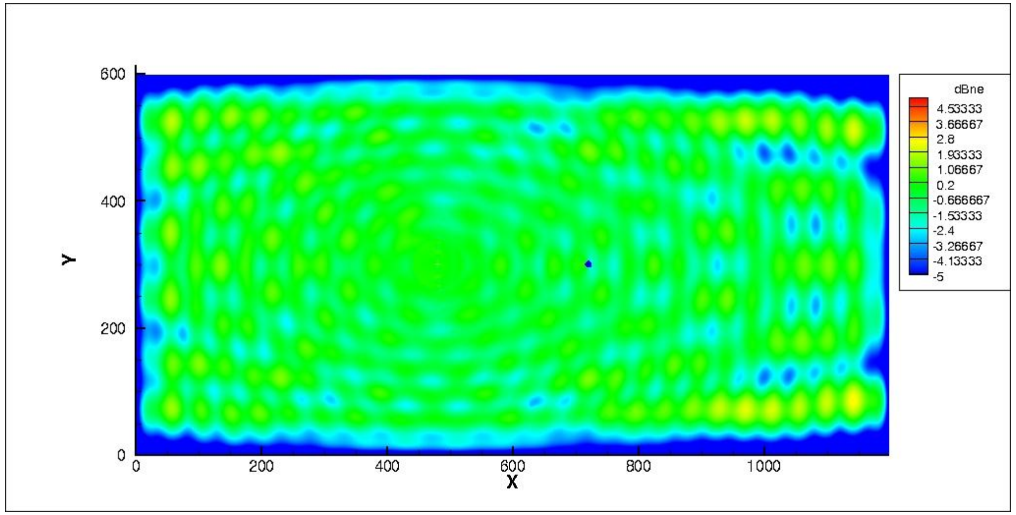

Рис 42. – Ошибки невязкого решения

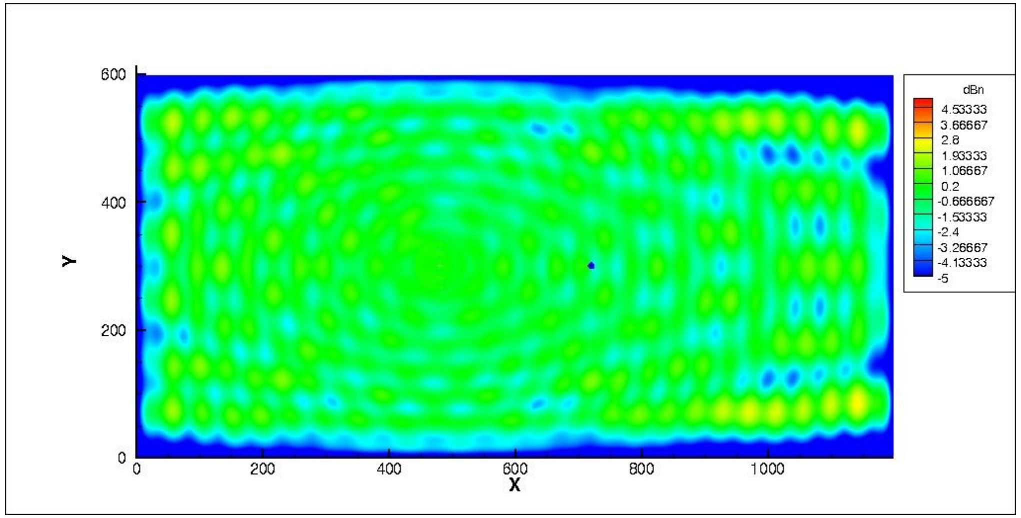

Рис 43. – Ошибки точного решения

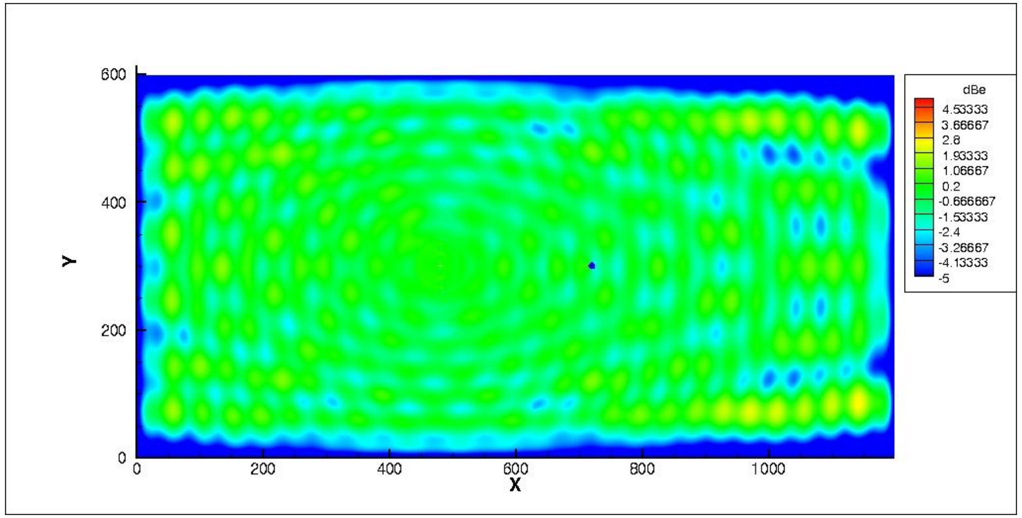

Рис 44. – Ошибки приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

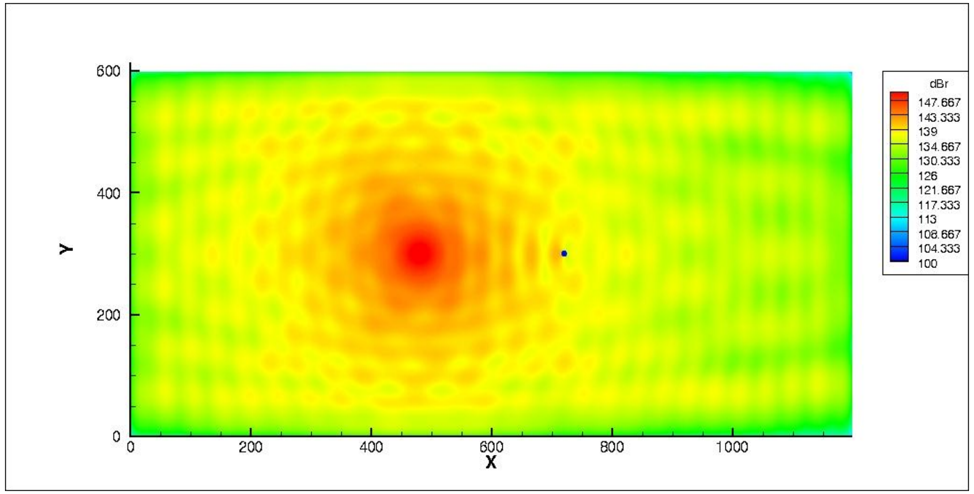

Рис 45. – Уровень шума численный

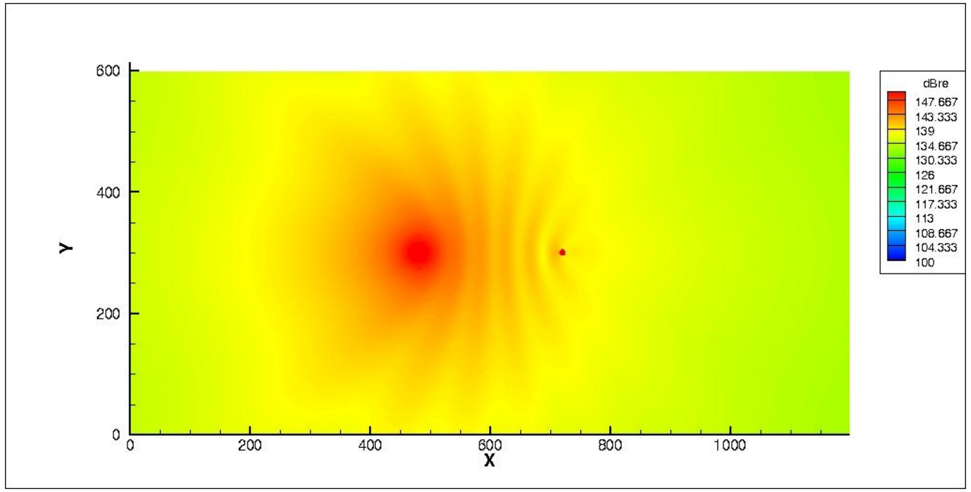

Рис 46. – Уровень шума невязкого решения

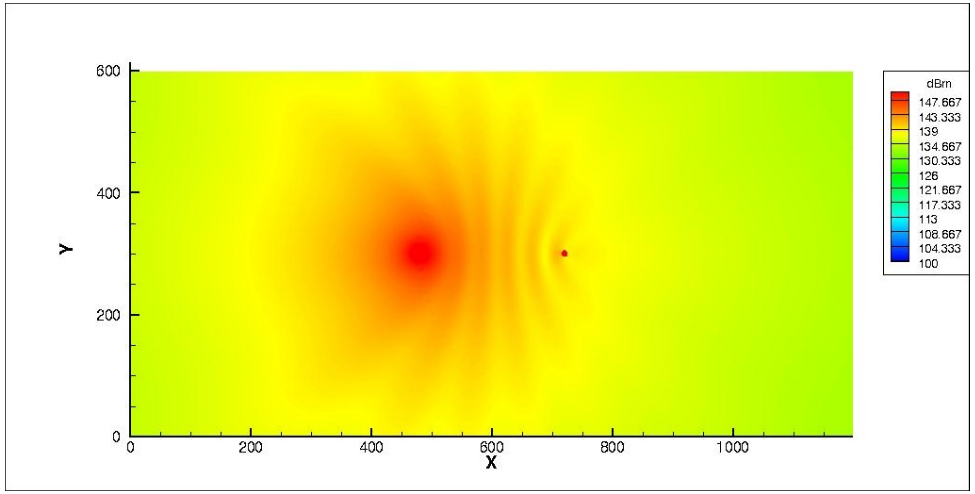

Рис 47. – Уровень шума точного решения

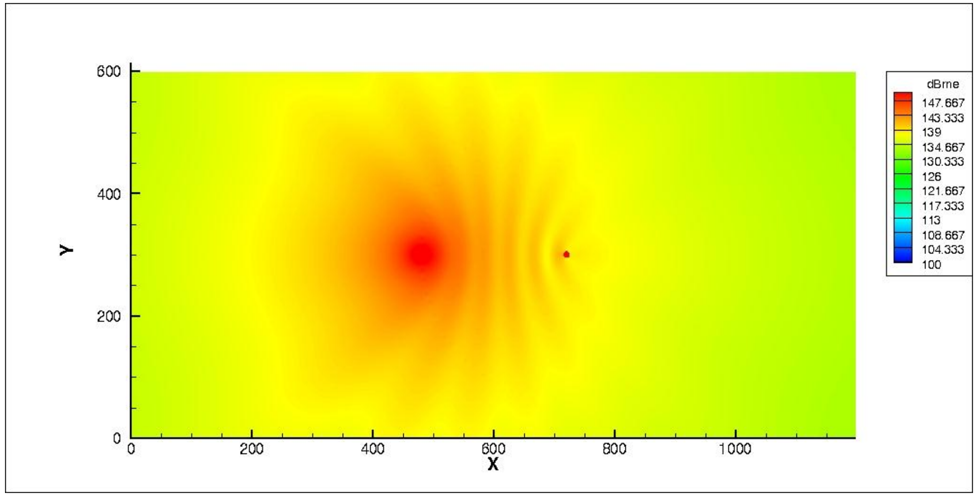

Рис 48. – Уровень шума приближённого решения

ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 80, d = 120, a = 5$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 9{,}798$

$\infty = 150$

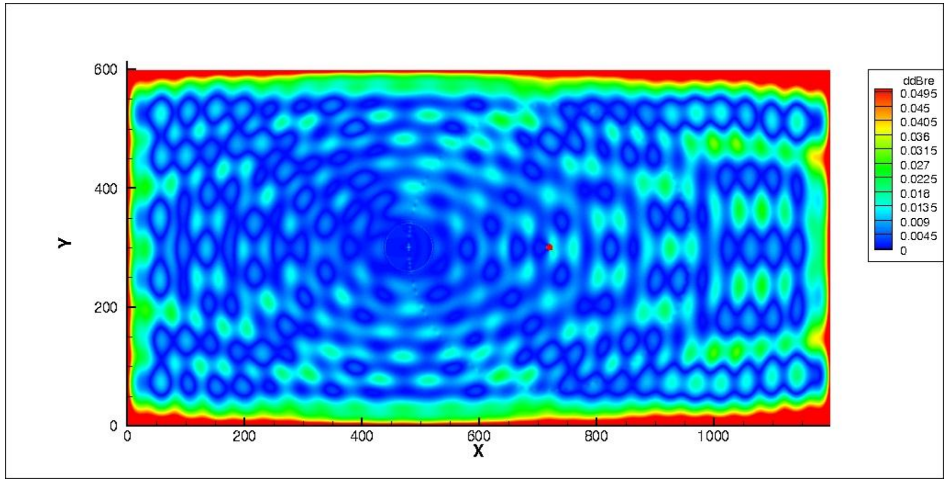

Рис 49. – Ошибки шума невязкого решения

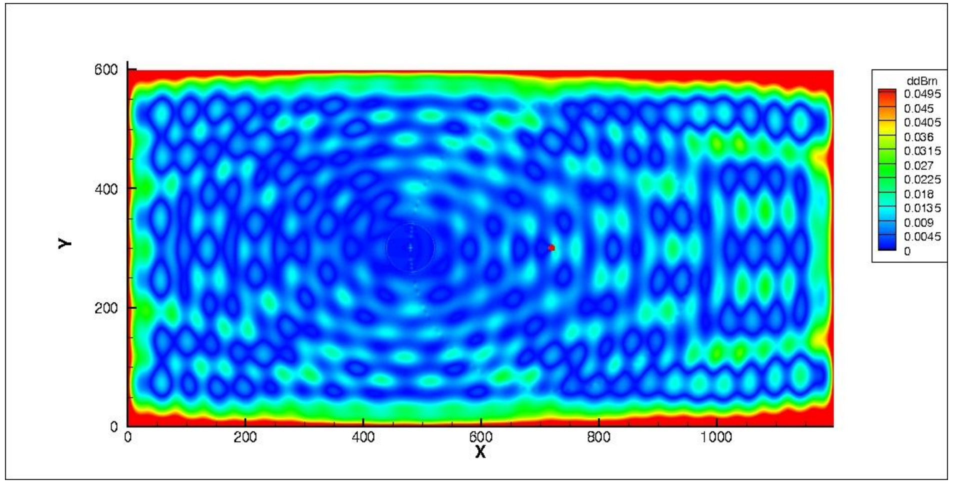

Рис 50. – Ошибки шума точного решения

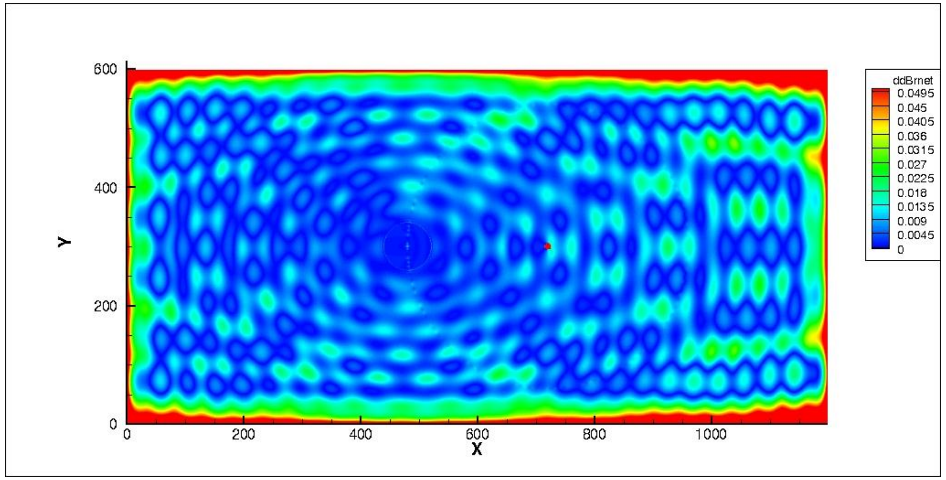

Рис 51. – Ошибки шума приближённого решения

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$$\lambda = 20, d = 600, a = 200$$

$$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}274$$

$$\infty = 400$$

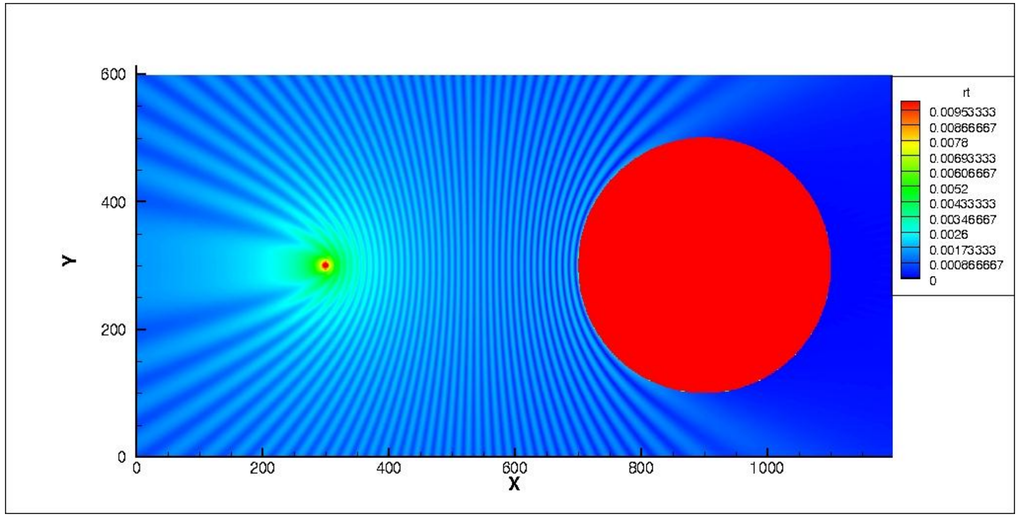

Рис 52. – Невязкое решение

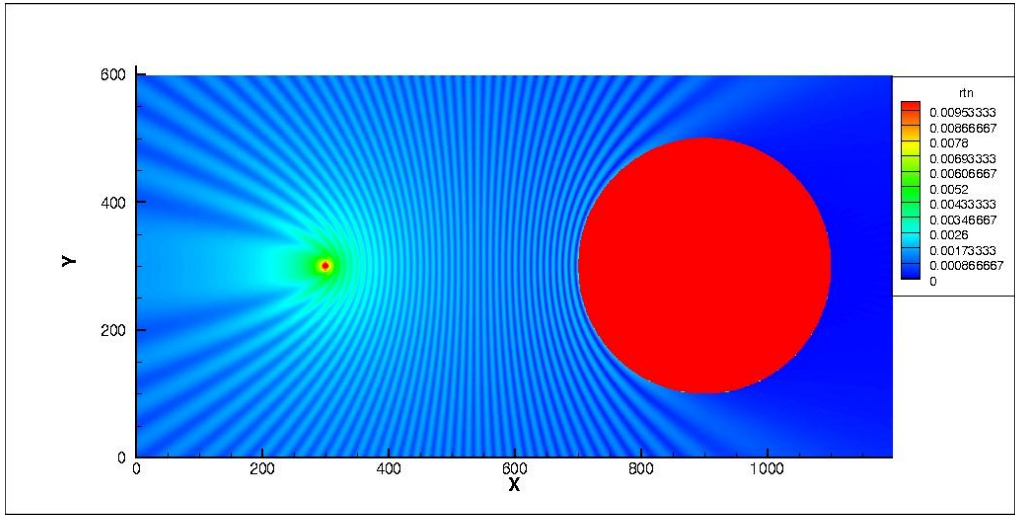

Рис 53. – Точное решение

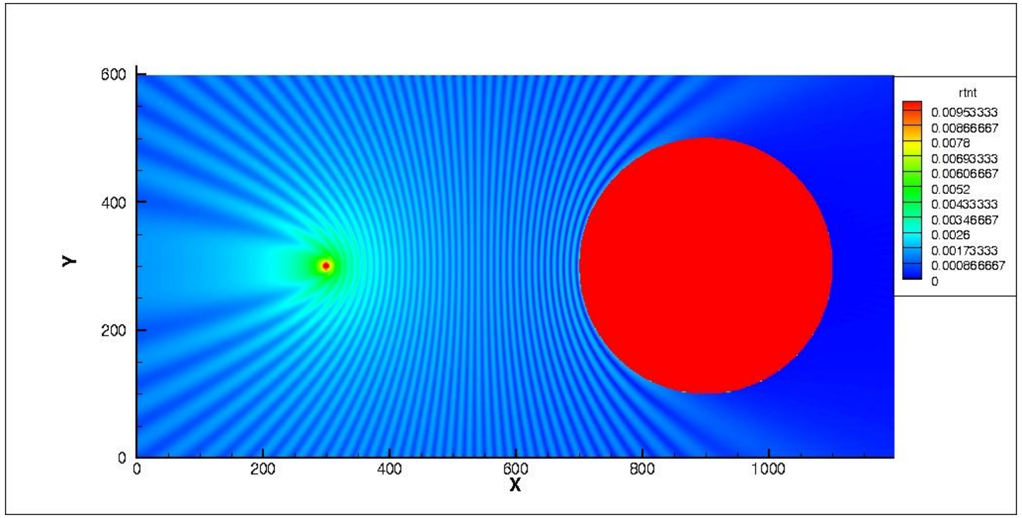

Рис 54. – Приближённое решение

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 20, d = 600, a = 200$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}274$

$\infty = 400$

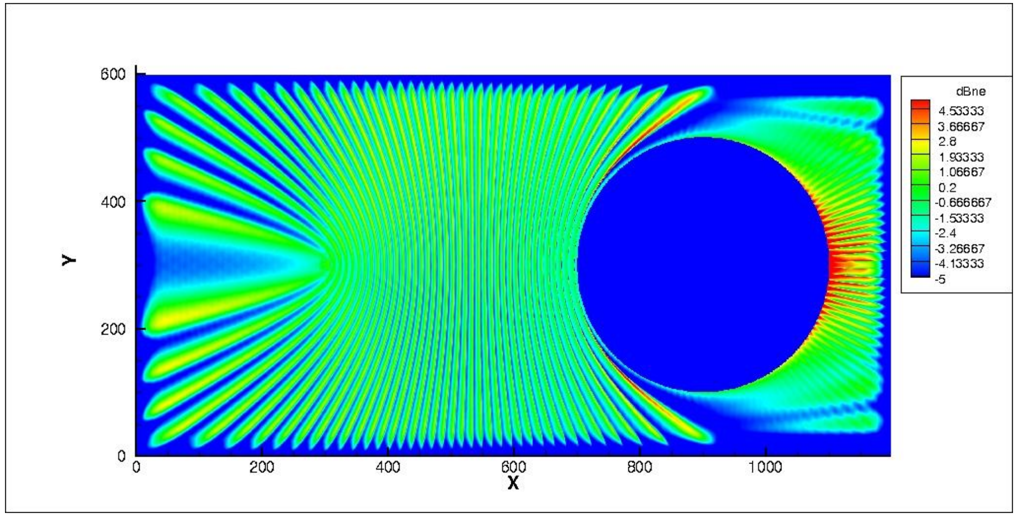

Рис 55. – Ошибки невязкого решения

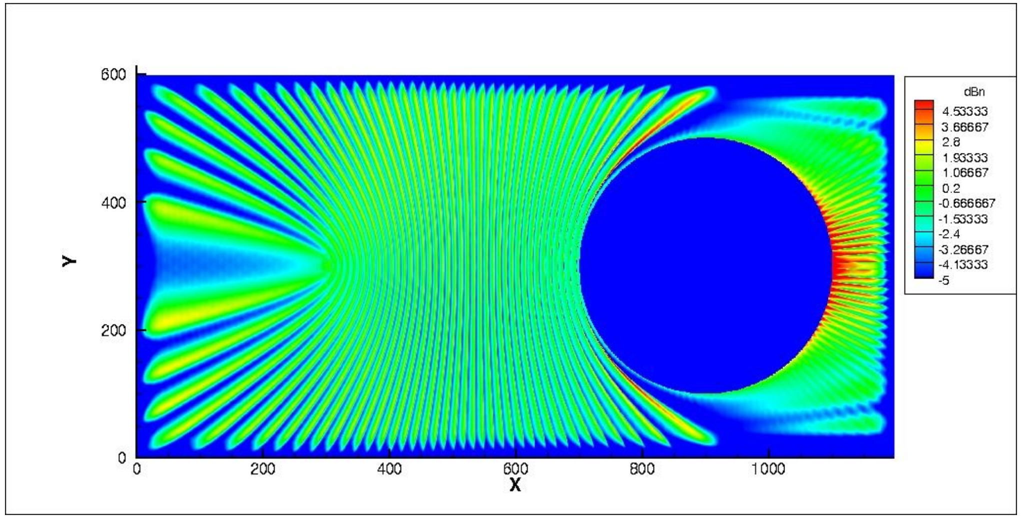

Рис 56. – Ошибки точного решения

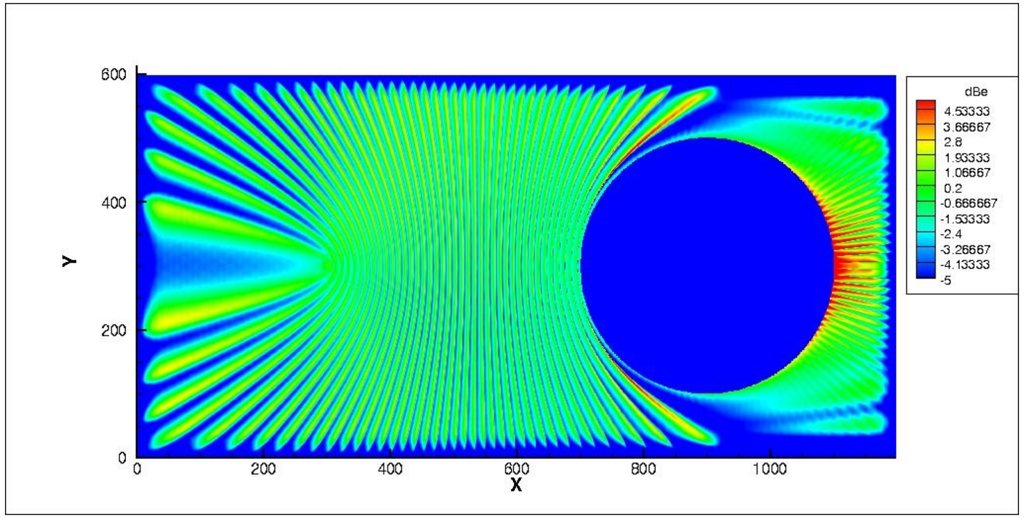

Рис 57. – Ошибки приближённого решения

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

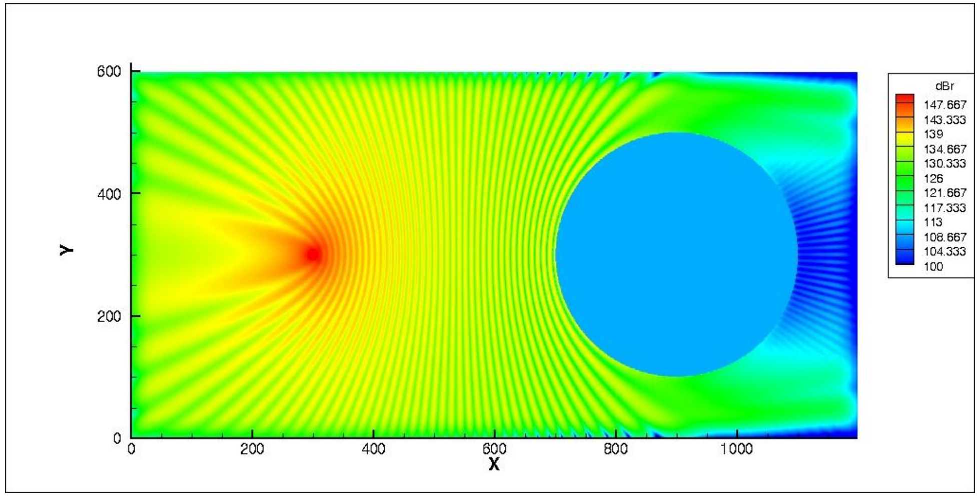

Рис 58. – Уровень шума численный

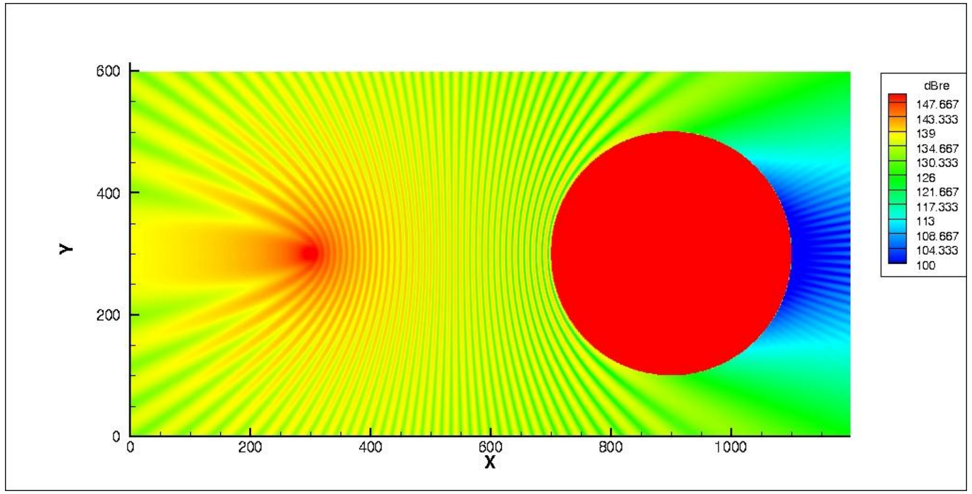

Рис 59. – Уровень шума невязкого решения

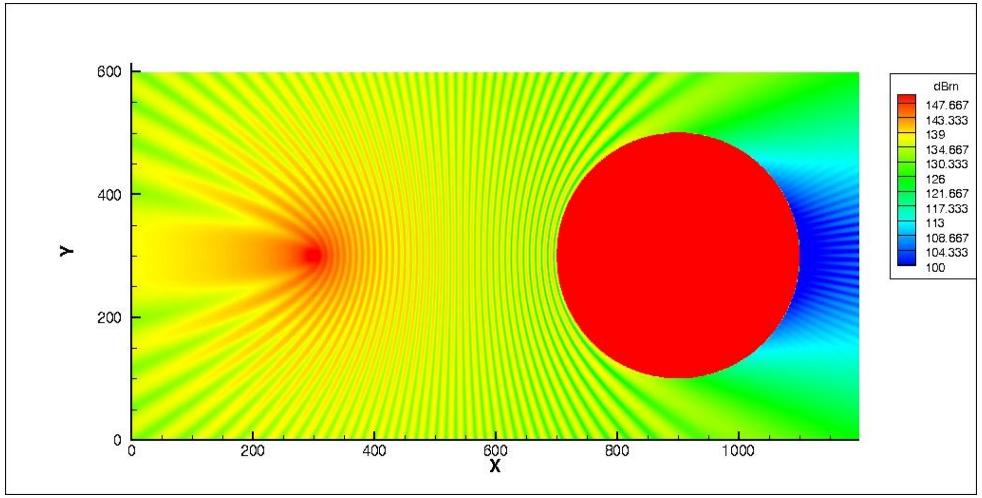

Рис 60. – Уровень шума точного решения

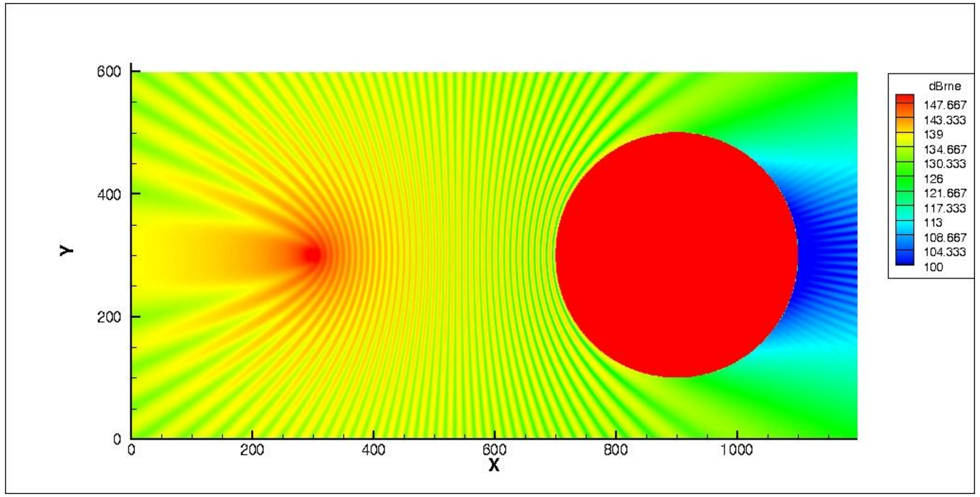

Рис 61. – Уровень шума приближённого решения

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (БОЛЬШОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$$\lambda = 20, d = 600, a = 200$$

$$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}274$$

$$\infty = 400$$

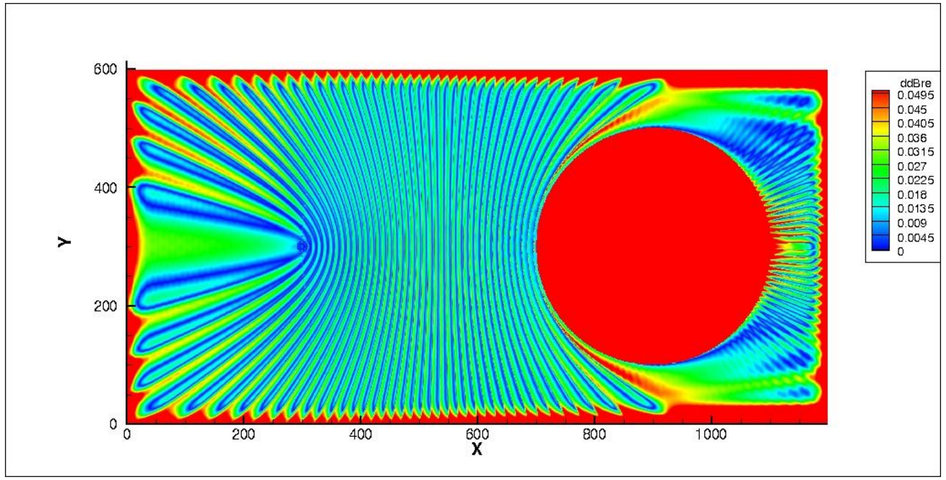

Рис 62. – Ошибки шума невязкого решения

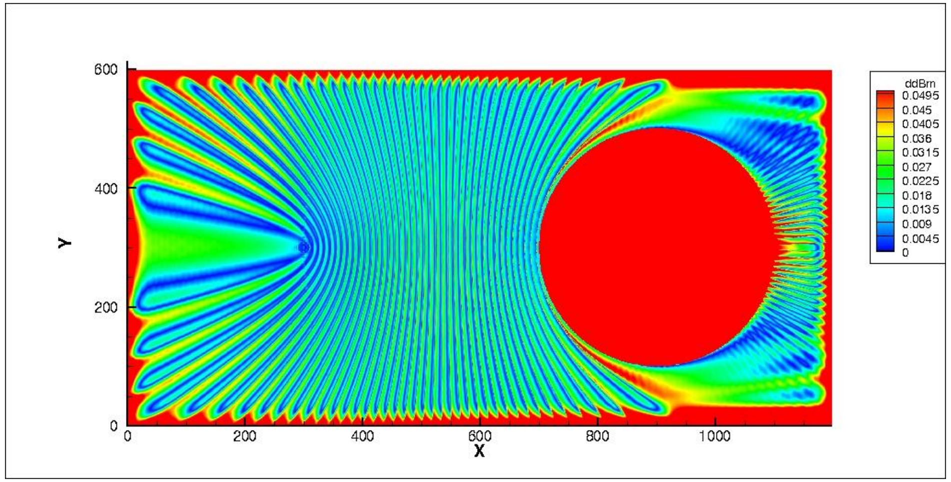

Рис 63. – Ошибки шума точного решения

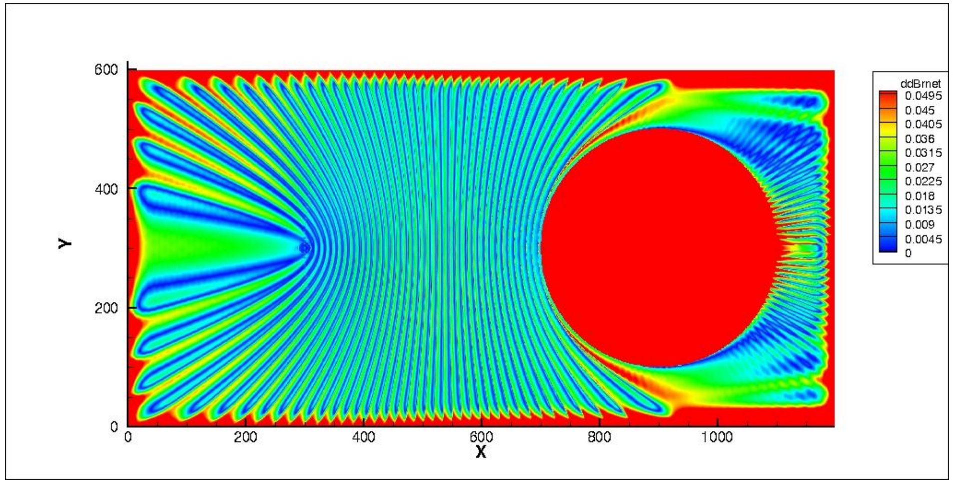

Рис 64. – Ошибки шума приближённого решения

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$$\lambda = 20, d = 120, a = 100$$

$$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}245$$

$$\infty = 300$$

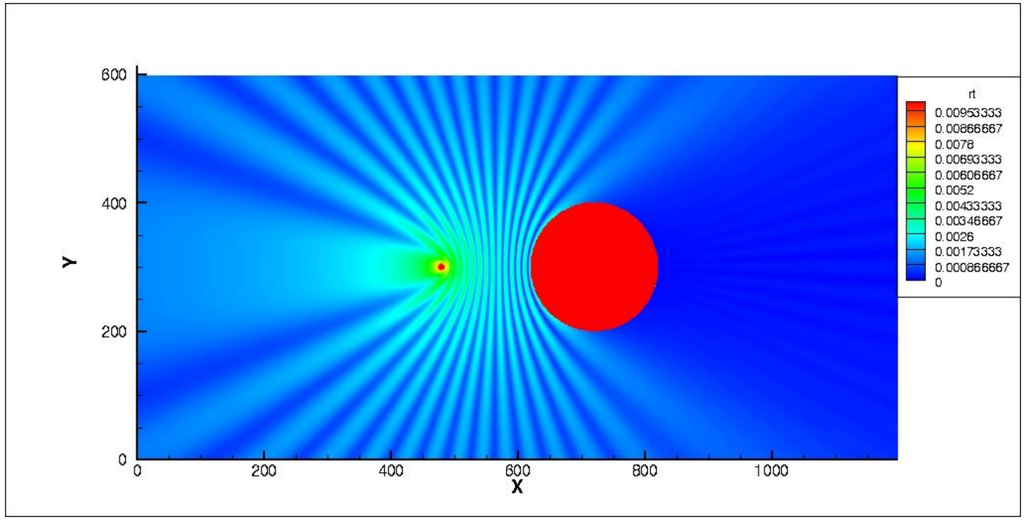

Рис 65. – Невязкое решение

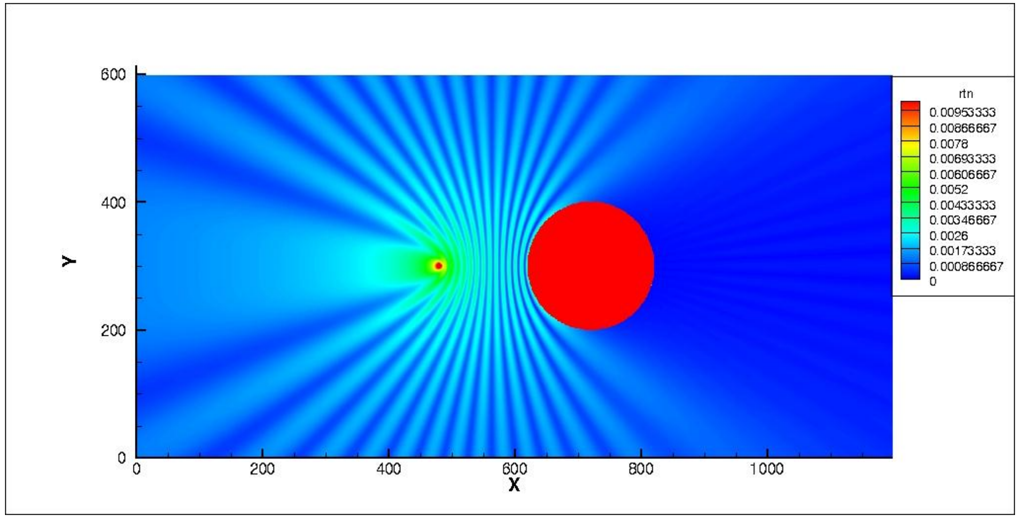

Рис 66. – Точное решение

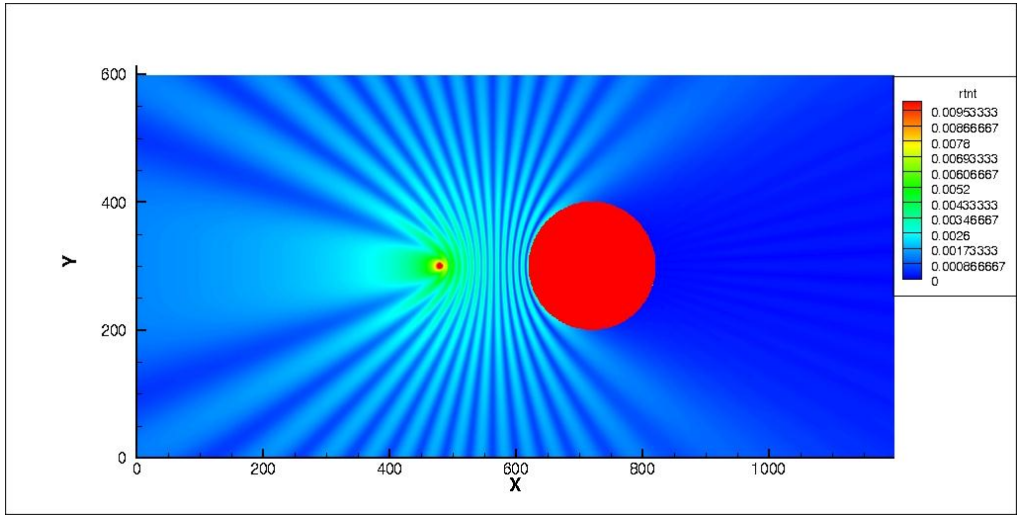

Рис 67. – Приближённое решение

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 20, d = 120, a = 100$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}245$

$\infty = 300$

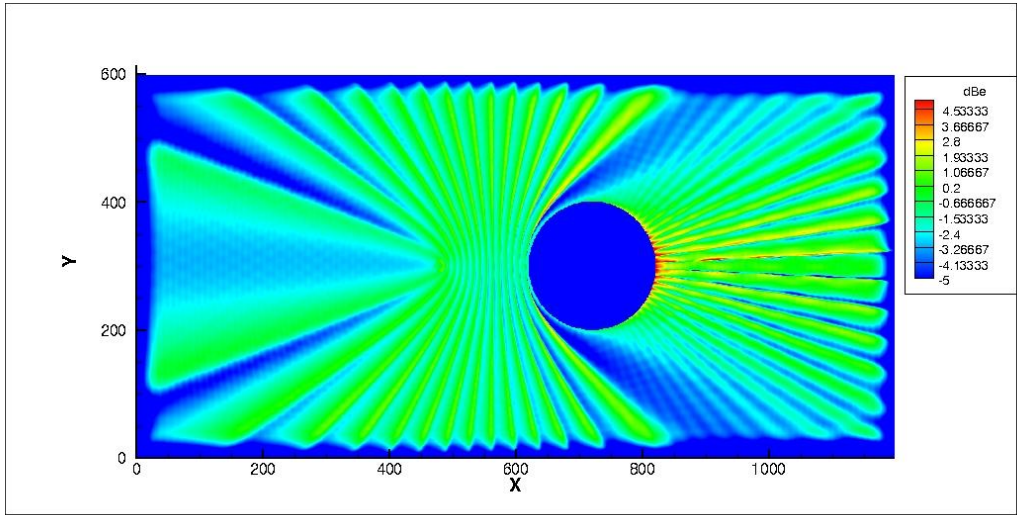

Рис 68. – Ошибки невязкого решения

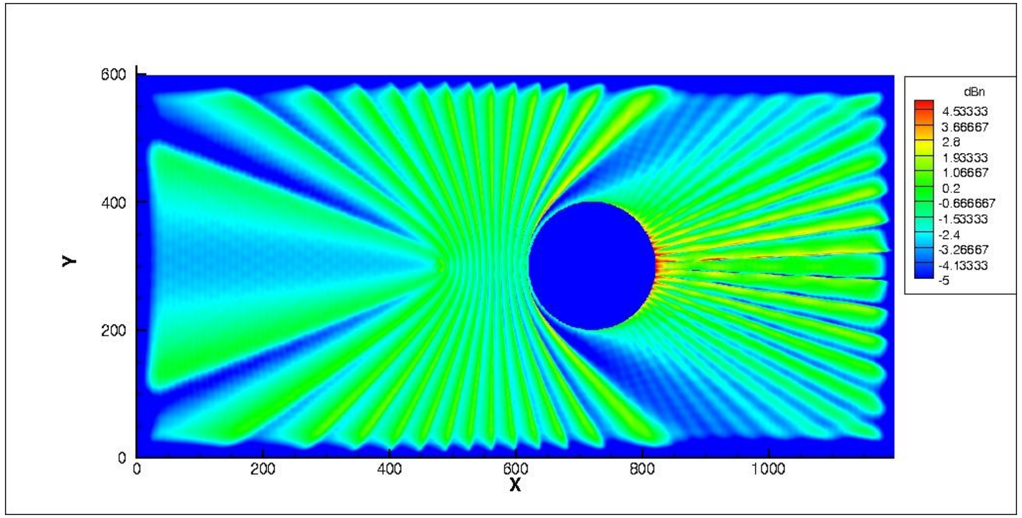

Рис 69. – Ошибки точного решения

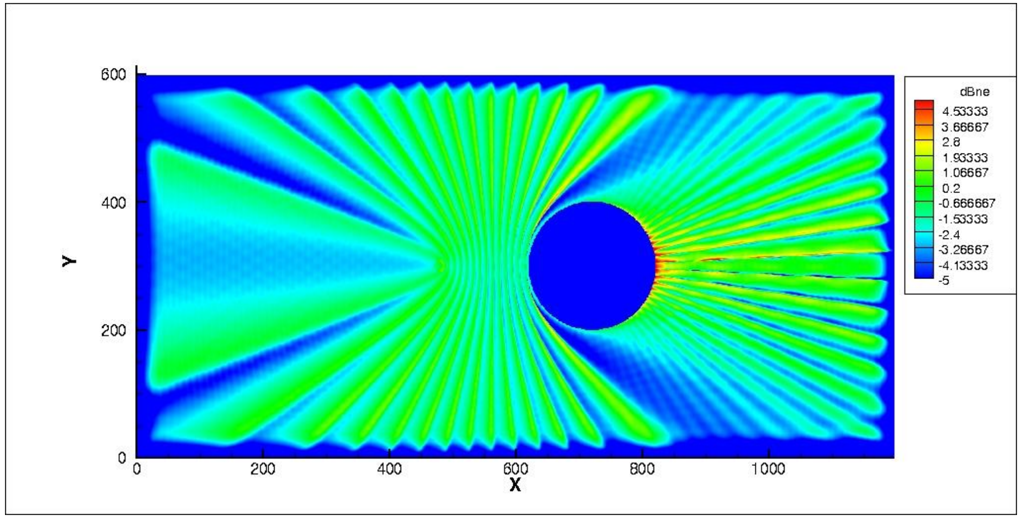

Рис 70. – Ошибки приближённого решения

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

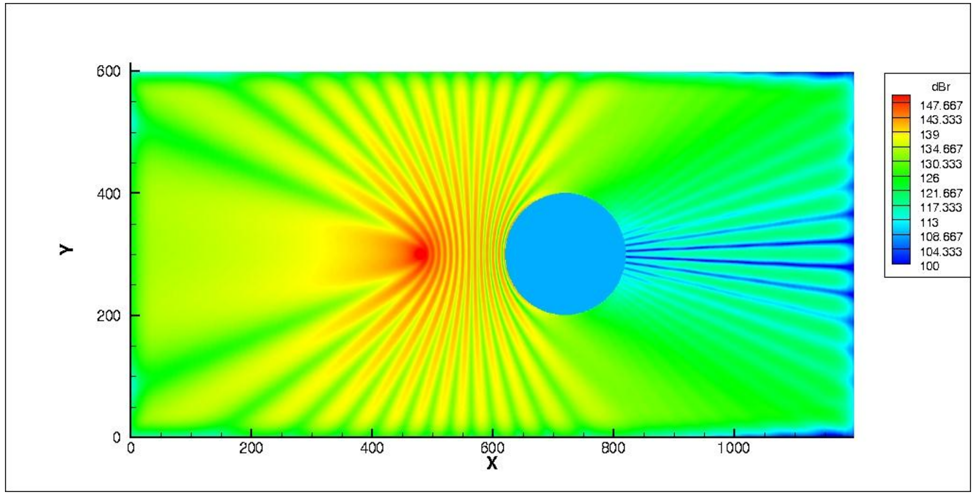

Рис 71. – Уровень шума численный

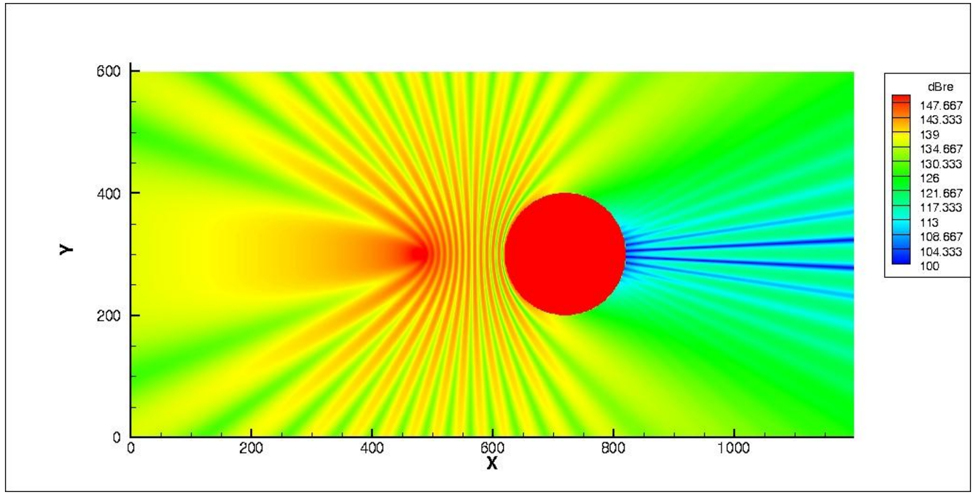

Рис 72. – Уровень шума невязкого решения

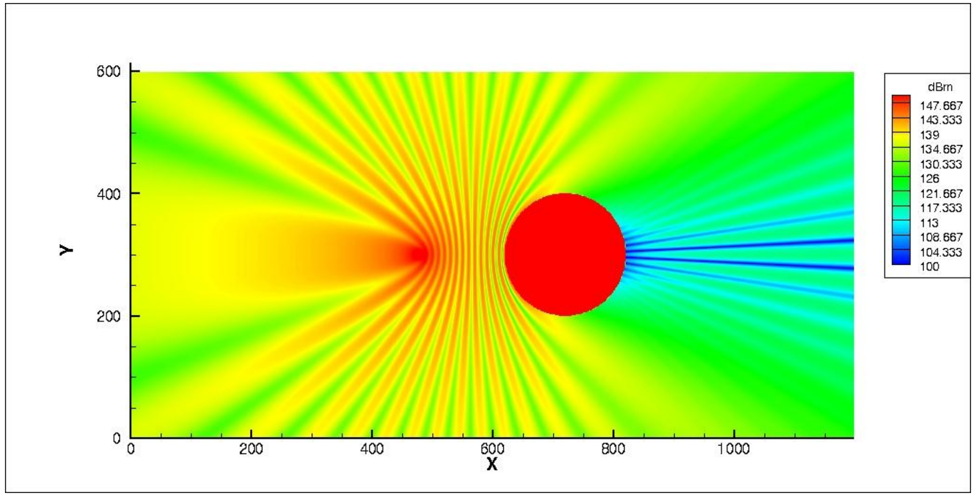

Рис 73. – Уровень шума точного решения

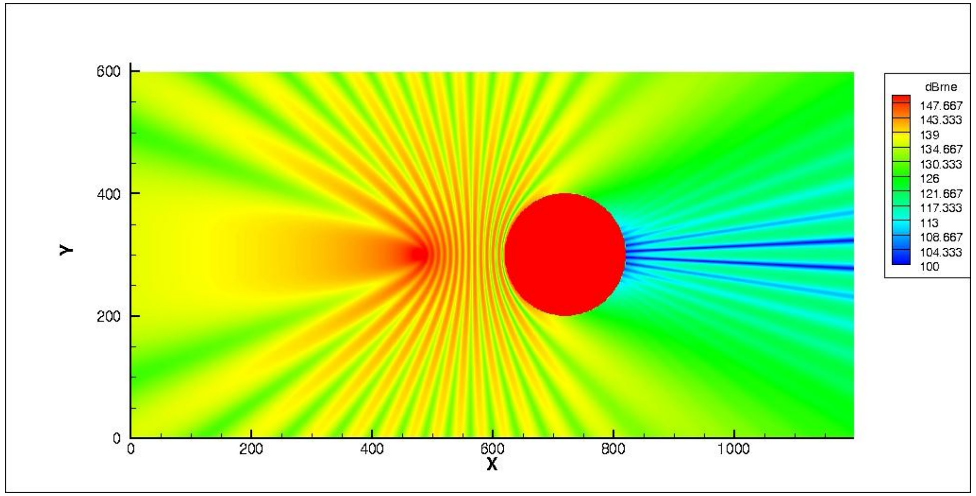

Рис 74. – Уровень шума приближённого решения

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ (МАЛОЕ РАССТОЯНИЕ)

Сетка – 1200*600

$\lambda = 20, d = 120, a = 100$

$p = \frac{\sqrt{\lambda d}}{2a} \approx 0{,}245$

$\infty = 300$

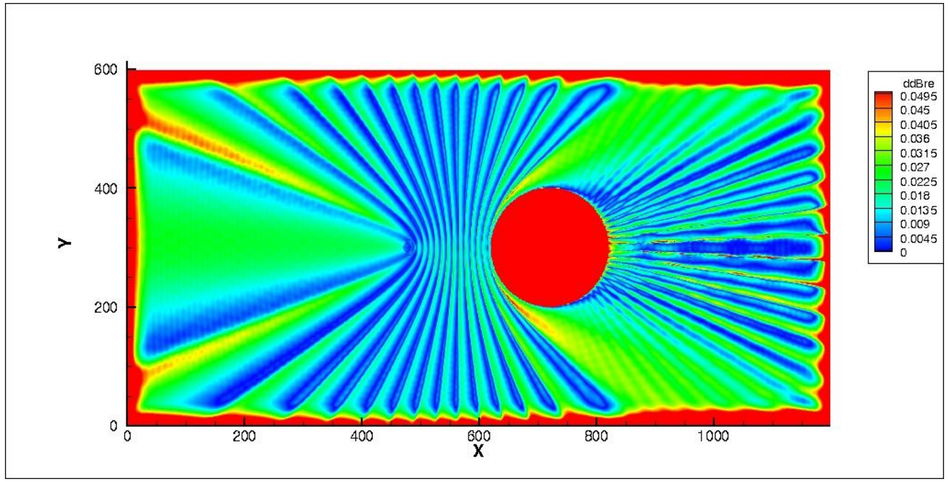

Рис 75. – Ошибки шума невязкого решения

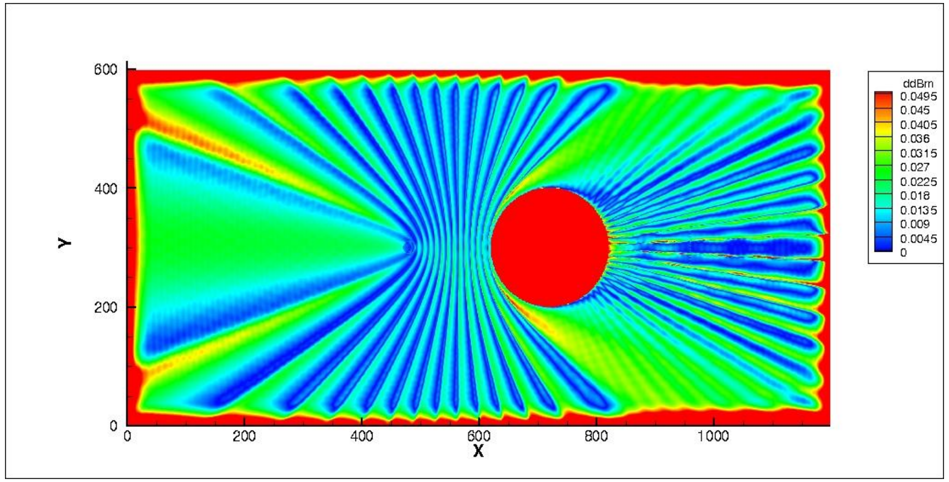

Рис 76. – Ошибки шума точного решения

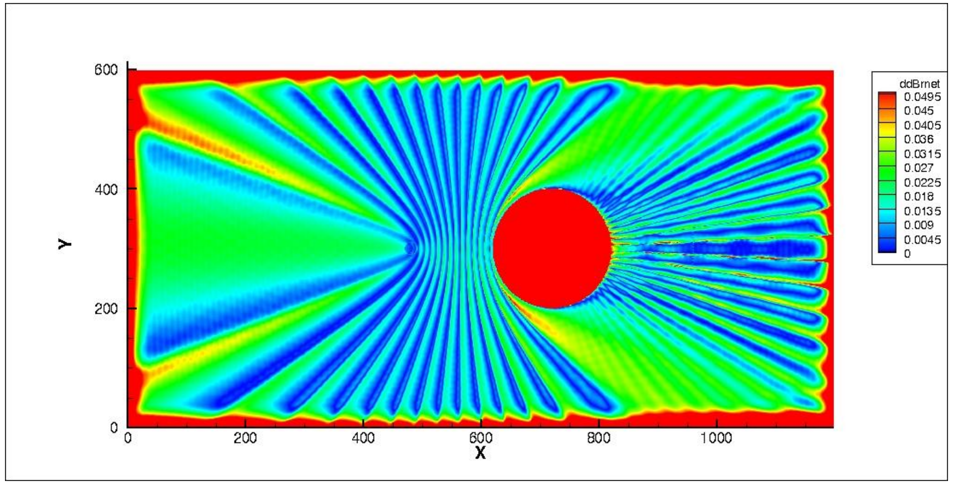

Рис 77. – Ошибки шума приближённого решения

Спасибо за внимание!

111116, Россия, Москва,
ул. Авиамоторная, 2
www.ciam.ru

Тел.: +7 (499) 763 57 47
E-mail: info@ciam.ru