

Новый численно-аналитический алгоритм расчета вязко-невязкого взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем



Александр Адрианов

В рамках дискретно-аналитического подхода, на основе синтеза методов машинной (компьютерной) алгебры и разностных методов, кратко рассмотрен новый комплекс программ для моделирования вязко-невязкого взаимодействия схематизированного (выделенного) скачка уплотнения со сдвиговым слоем.

Приводятся отдельные расчеты и наложение их на плоскость ударных поляр. Показаны редкие дефекты такого распространенного представления ударных решений

Используемые в докладе лит. источники:

Адрианов А. Л., Усков В. Н., Старых А. Л. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. – Новосибирск: ВО «Наука». Сибирская издательская фирма, 1995. 180 с.

Адрианов А. Л. Обобщенные дифференциальные соотношения на скачке уплотнения // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Матем. моделирование физ. процессов. 2009. Вып. 4. С. 22–30.

Адрианов А.Л. О допустимых границах в задании краевого эффекта за скачком уплотнения / А.Л. Адрианов // Вестник Сибирского гос. аэрокосм. ун-та им. акад. М.Ф. Решетнева. – Красноярск, 2012. Вып. 5(45). С. 6–12.

Адрианов А. Л. Математическое моделирование ударных течений идеального и вязкого теплопроводного газа на основе дискретно-аналитического подхода: монография / А. Л. Адрианов. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2016. 216 с.

Адрианов А.Л. Лагранжев подход для расчёта эволюции ударного фронта в неоднородном потоке идеального и вязкого теплопроводного газа. Супервычисления и математическое моделирование. Труды XVII Международной конференции / Под ред. Р.М. Шагалиева. – Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ». – 2019. – 591 с., С. 24–31.

Адрианов А.Л., Сизаско В. О некорректном представлении ударного процесса на ударных полярах в вязком теплопроводном газе // Сибирский аэрокосмический журнал. 2021. Т.22, №4. С. 558–567 (в печати..).

Условные обозначения

p, ρ, M – давление, плотность, число Маха невозмущенного потока;

$\hat{p}, \hat{\rho}, \hat{M}$ – давление, плотность, число Маха за СУ (скачком уплотнения);

γ – показатель адиабаты (отношение теплоемкостей); $\varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$;

$J = \frac{\hat{p}}{p}$ – интенсивность газодинамического разрыва; $\Lambda = \ln(J)$;

• • •

σ – угол наклона СУ к вектору скорости набегающего потока;

β – угол поворота вектора скорости на СУ;

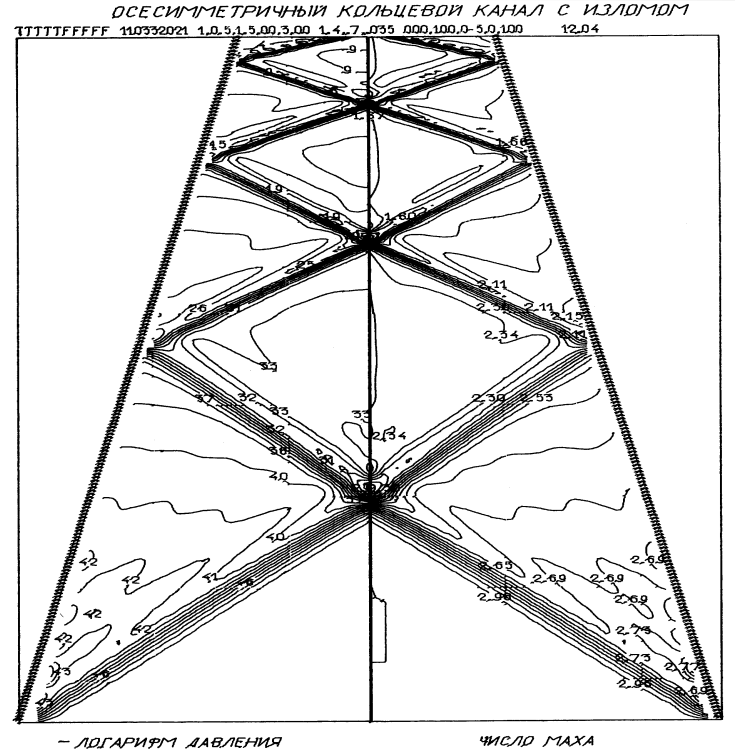
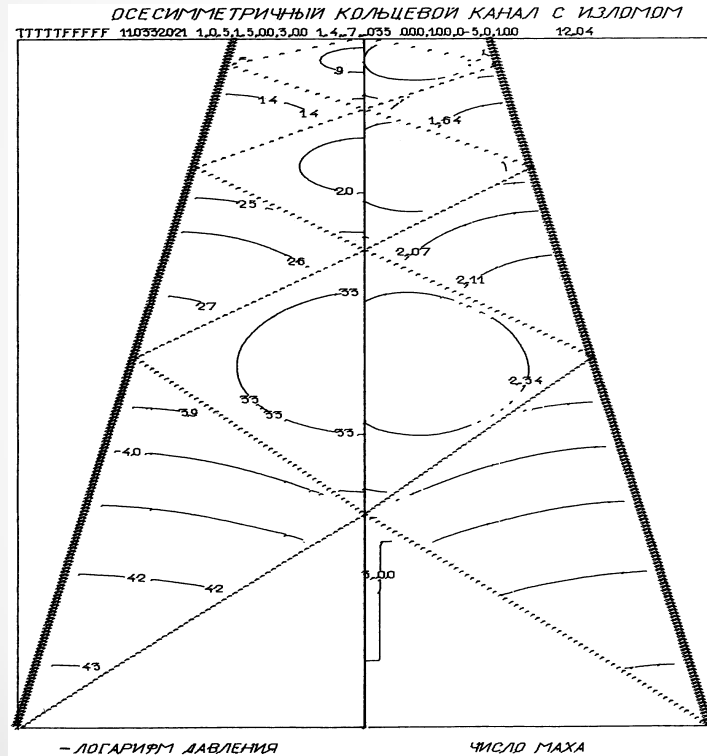
χ – показатель направления СУ, $\chi = +1, -1$ – для правого и левого, соответственно;

h – энтальпия (теплосодержание), $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$

- О терминологии
 - 1) «Выделение разрывов» (скачков уплотнения, тангенциальных, слабых и фиктивных (характеристик) разрывов).
 - 2) «Подгонка разрывов» («Shock fitting method»).
 - 3) «Схематизация» (например, скачка уплотнения; термин применяется в случае вязкого теплопроводного газа).

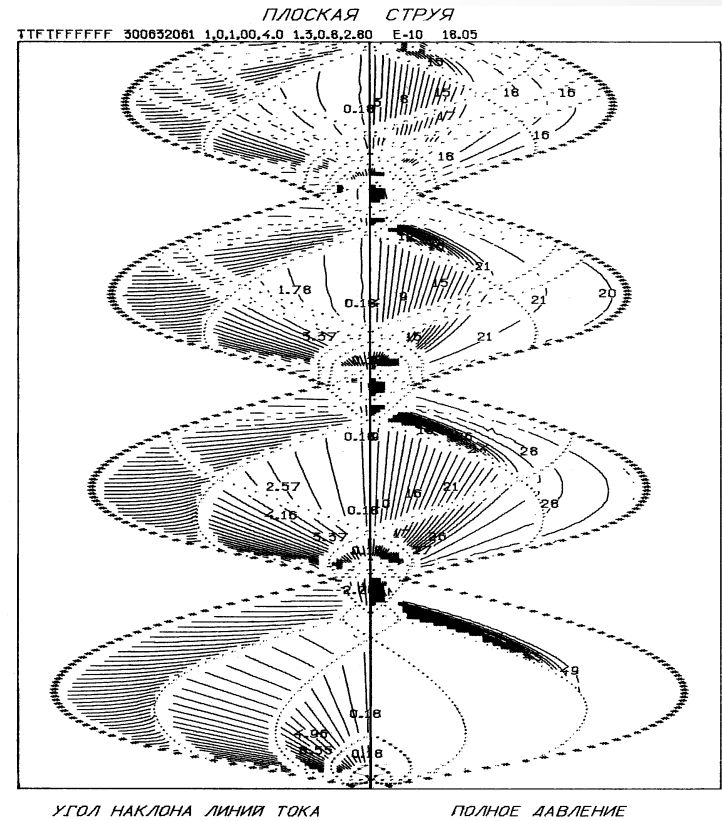
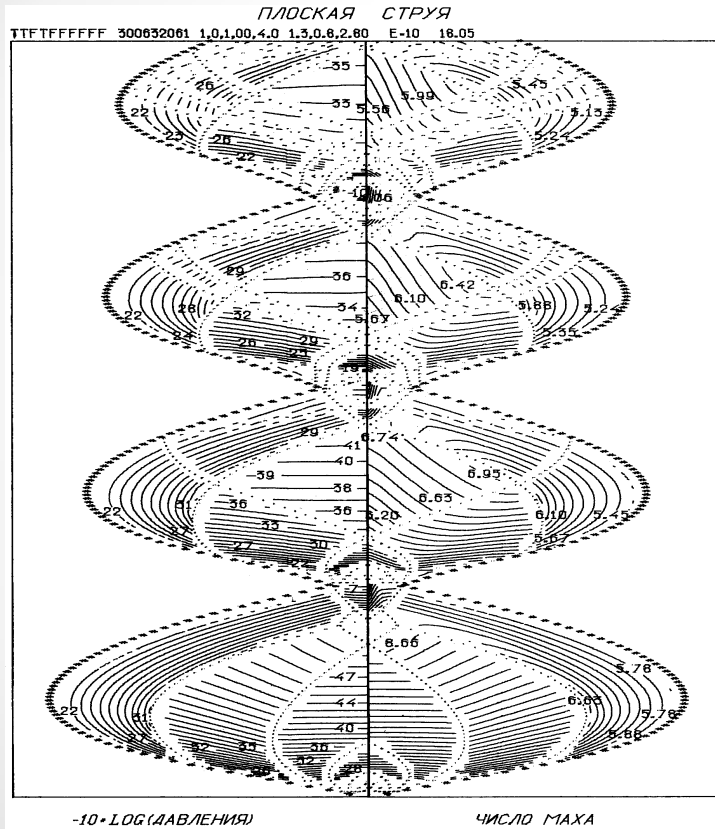
Что даёт выделение или схематизация разрывов?

1. «Метод выделения множества разрывов...» (Адрианов А.Л., Старых А.Л., Усков В.Н. Интерференция стационарных газодинамических разрывов. – Новосибирск: ВО «Наука», 1995. 180 с.)
2. «Однородный конечно-разностный алгоритм...»



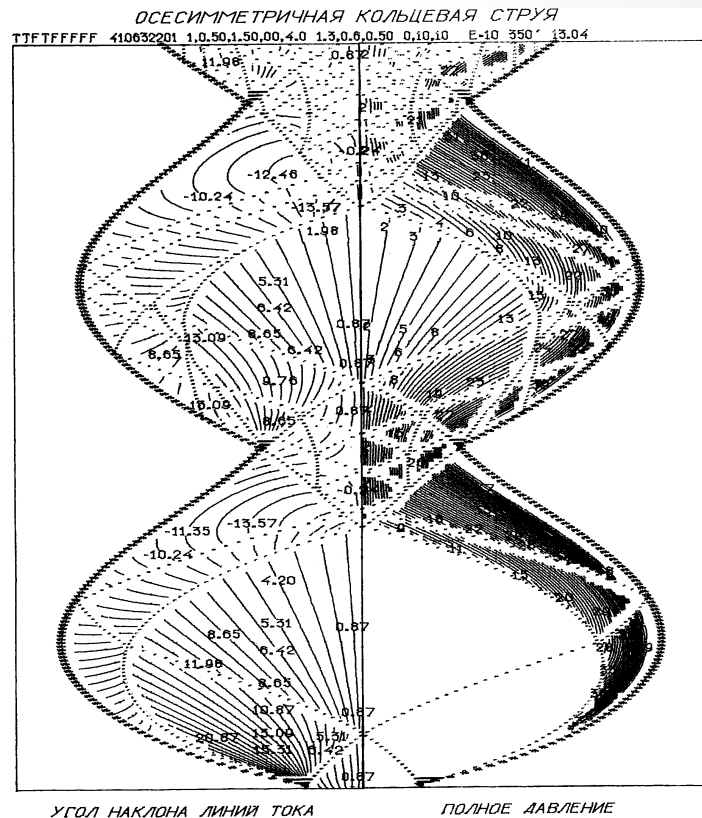
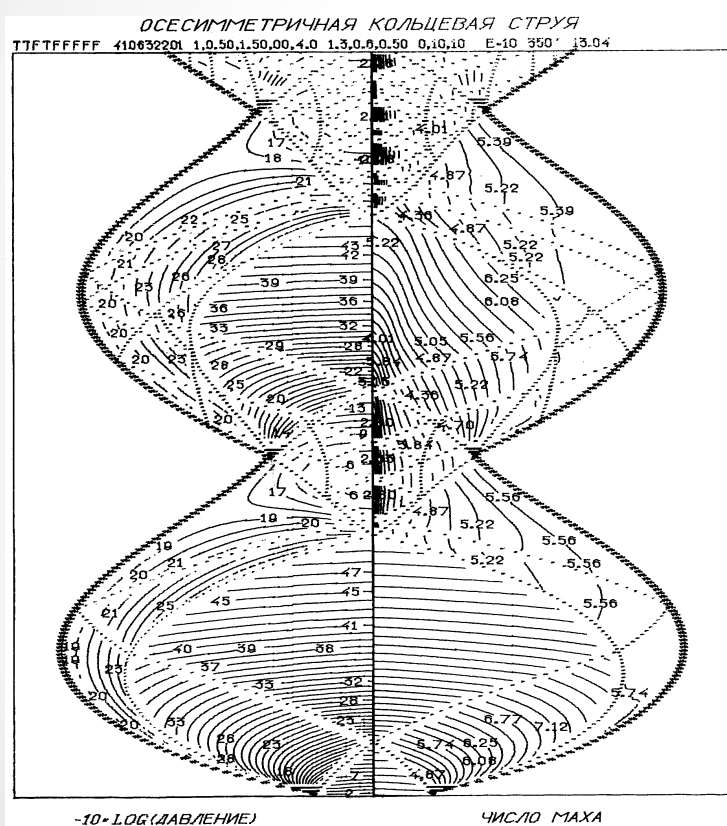
Что даёт выделение или схематизация разрывов?

«Метод выделения множества разрывов...»



Что даёт выделение или схематизация разрывов?

«Метод выделения множества разрывов...»

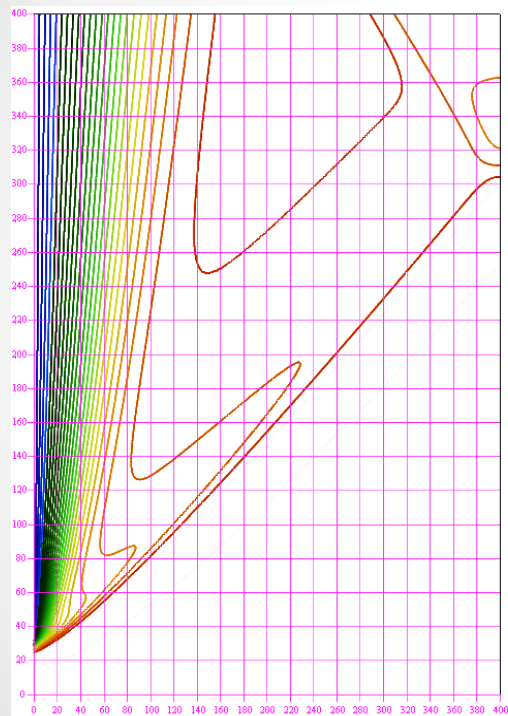


2. Вязкий теплопроводный газ.

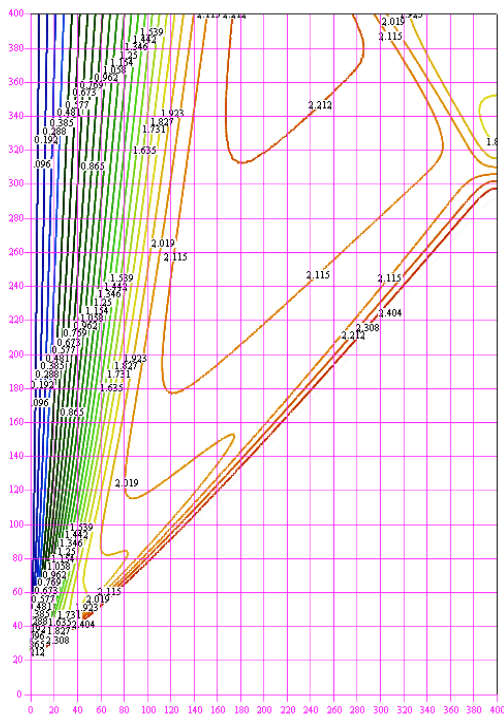
Задача о взаимодействии скачка уплотнения (СУ) с пограничным слоем исследуется методами физического и вычислительного эксперимента сравнительно давно, и стала уже пробной для вычислительных методик на основе полных нестационарных *уравнений Навье-Стокса* (УНС), а также асимптотических методов расчета.

В случае взаимодействия СУ со сдвиговым слоем (СС) задача остается актуальной, поскольку часто встречается в реальных и моделируемых течениях. С математической точки зрения она привлекательна еще и потому, что вышеуказанное взаимодействие в пределе – в рамках стационарной газовой динамики – может рассматриваться как более простая задача о взаимодействии СУ и тангенциального разрыва (ТР).

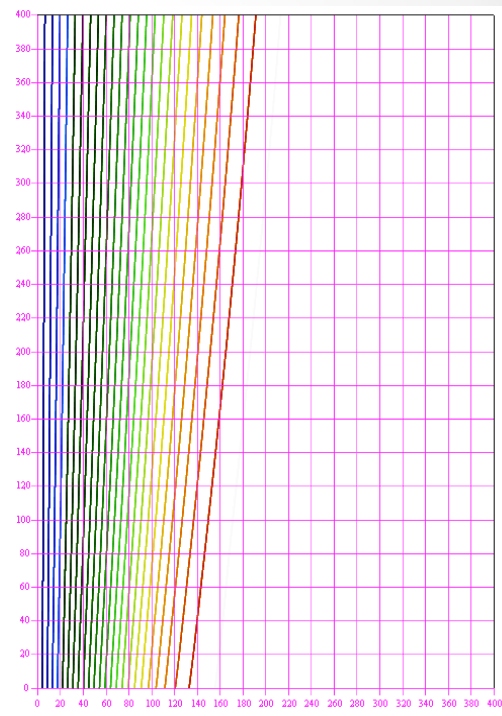
фрагменты решения полных УНСВТ ; $Re = 10^3$



U



M



U1

Постановка вязкой задачи взаимодействия

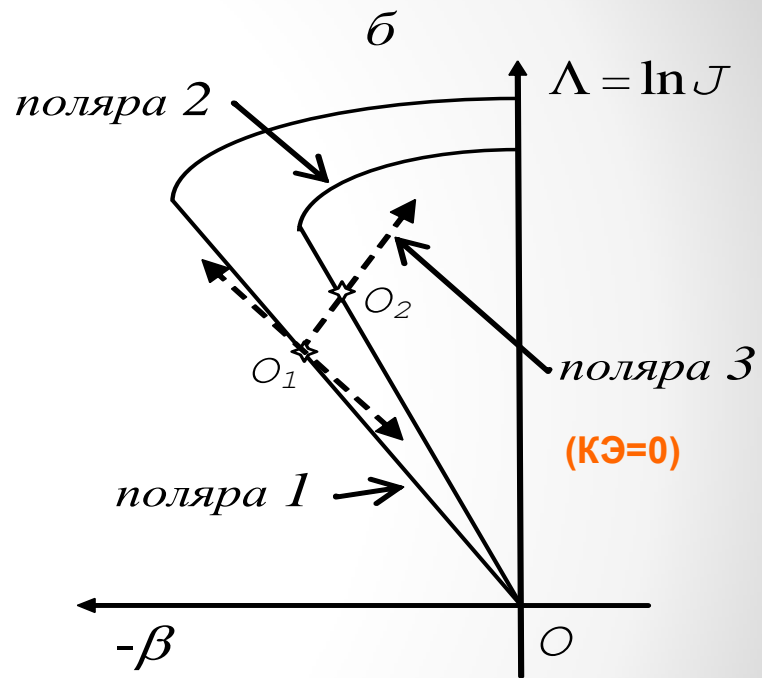
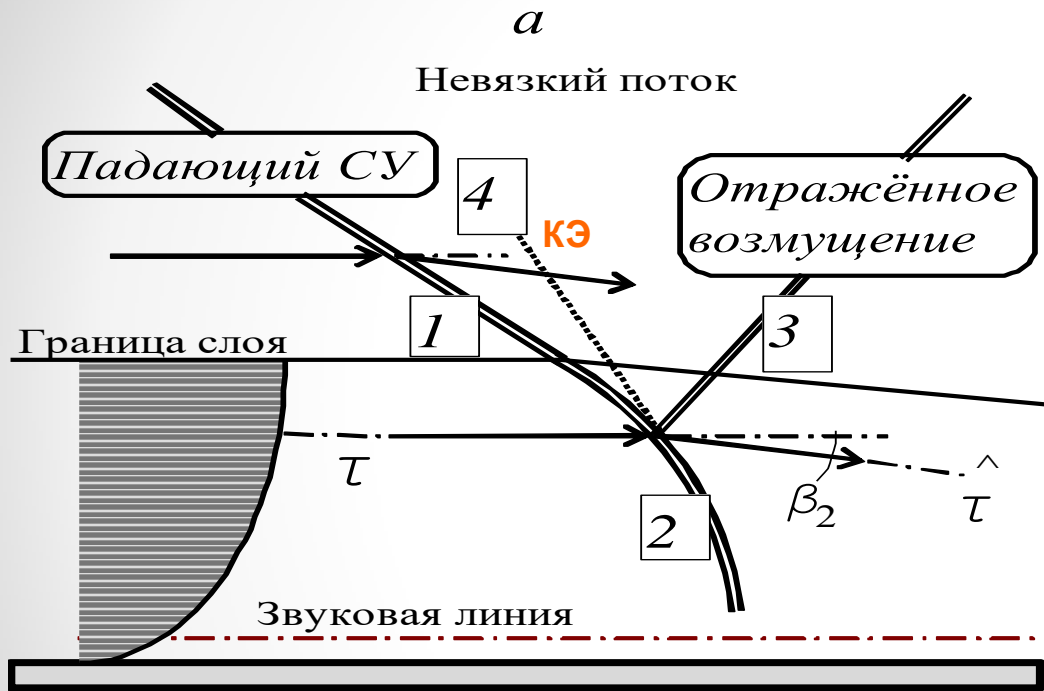


Схема взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем:
а – физическая плоскость; *б* – плоскость поляр.

Условия/соотношения на СУ (0-го порядка)

Связь газодинамических параметров на СУ :

$$\left[\rho V_n \right] = \rho V_n - \hat{\rho} \hat{V}_n = 0,; \quad \left[p + \rho V_n^2 \right] = 0; \quad \left[\rho V_n V_\tau \right] = 0; \quad \left[h + \frac{V_n^2}{2} \right] = 0,$$

• • •

где V_n и V_τ – нормальная и касательная составляющие вектора скорости к поверхности СУ.

Обобщённые соотношения 0-го п. на крив-ном косом СУ

$$\bar{n}_s = n_s/L, \quad \bar{\rho} = \rho/\rho_\infty, \quad \bar{W} = W/W_\infty, \quad \bar{p} = p/(\rho_\infty W_\infty^2), \quad \bar{T} = c_p T/W_\infty^2, \\ \bar{h} = h/W_\infty^2, \quad \bar{T} = \bar{h}, \quad \bar{p} = \bar{\rho}\bar{T}(\gamma - 1)/\gamma, \quad \bar{\mu} = \mu/\mu_\infty = (\bar{h}/\bar{h}_\infty)^\omega$$

$$\hat{\rho}\hat{V} = \rho V = M,$$

$$\hat{\rho}\hat{V}\hat{U} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial n_s} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau_s} \right) = \rho V U - \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left(\frac{\partial U}{\partial n_s} + \frac{\partial V}{\partial \tau_s} \right) = I_\tau,$$

$$\hat{\rho}\hat{V}^2 + \hat{p} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial n_s} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau_s} \right) = \rho V^2 + p - \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial V}{\partial n_s} - \frac{\partial U}{\partial \tau_s} \right) = I_n,$$

$$\hat{\rho}\hat{V}\hat{H} - \frac{\hat{\mu}}{\text{Re}_\infty} \left[\hat{U} \left(\frac{\partial \hat{U}}{\partial n_s} + \frac{\partial \hat{V}}{\partial \tau_s} \right) + \hat{V} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial \hat{V}}{\partial n_s} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial \tau_s} \right) + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial \hat{h}}{\partial n_s} \right) \right] =$$

$$\rho V H - \frac{\mu}{\text{Re}_\infty} \left[U \left(\frac{\partial U}{\partial n_s} + \frac{\partial V}{\partial \tau_s} \right) + V \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial V}{\partial n_s} - \frac{\partial U}{\partial \tau_s} \right) + \frac{1}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial h}{\partial n_s} \right) \right] = E.$$

УНСВТ

$$\frac{d\hat{\Phi}}{dw} = \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{s}} \cos\hat{\sigma} + \frac{\partial\hat{\Phi}}{\partial\hat{n}} \sin\hat{\sigma}, \quad \hat{\Phi} \neq \hat{\sigma};$$

$$\frac{d\hat{\sigma}}{dw} = K_w - \left(\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{s}} \cos\hat{\sigma} + \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{n}} \sin\hat{\sigma} \right), \quad K_w = \frac{d\Omega}{dw}, \quad \Omega = \theta + \sigma \equiv \hat{\theta} + \hat{\sigma}.$$



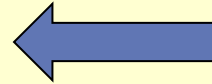
Дифференцирование вдоль фронта СУ соотношений 0-го порядка

$$\frac{\partial \ln(\hat{\rho}\hat{W})}{\partial\hat{s}} = -\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{n}} - \frac{\delta}{\gamma} \sin\hat{\theta}, \quad \hat{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\hat{p}}{\hat{h}},$$

$$\hat{\rho}\hat{W} \frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{s}} = -\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{s}} + \frac{1}{\text{Re}_\infty Y^\delta} \frac{\partial}{\partial\hat{n}} \left(Y^\delta \hat{\mu} \frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{n}} \right),$$

$$\hat{\rho}\hat{W}^2 \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{s}} = -\frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{n}} + \frac{1}{\text{Re}_\infty Y^\delta} \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial\hat{n}} \left(Y^\delta \hat{\mu}\hat{W} \frac{\partial\hat{\theta}}{\partial\hat{n}} \right),$$

$$\hat{\rho}\hat{W} \frac{\partial\hat{h}}{\partial\hat{s}} = \hat{W} \frac{\partial\hat{p}}{\partial\hat{s}} + \frac{1}{\text{Re}_\infty Y^\delta} \left[\frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial}{\partial\hat{n}} \left(Y^\delta \hat{\mu} \frac{\partial\hat{h}}{\partial\hat{n}} \right) + Y^\delta \hat{\mu} \left(\frac{\partial\hat{W}}{\partial\hat{n}} \right)^2 \right].$$



Для исключения производных по s- направлениям из продифференцированных соотношений используем параболизированные УНСВТ (ПУНС), записанные в (s,n) - координатах

Окончательная Матричная форма записи незамкнутых обобщённых дифференциальных соотношений на СУ (ОДСС).

$$a_{ij} \left(\hat{\Phi}_j \right)_{\hat{n}} + b_i K_w + c_{ij} (\Phi_j)_n + d_i \frac{\delta}{y} + \varepsilon^2 \times$$

$$\times \left[e_{ij} \left(\hat{\Phi}_j \right)_{\hat{n}\hat{n}} + f_i K_w' + g_{ij} (\Phi_j)_{nn} + N_i \right] = 0;$$

$$\Phi = (W, \theta, p, h)^T; \quad i, j = 1, \dots, 4;$$

$$\delta = 0 \ (\delta = 1); \quad \varepsilon^2 = (\text{Re}_\infty)^{-1}; \quad N_i = N_i \left(\left(\hat{\Phi}_j \right)_{\hat{n}}, (\Phi_j)_n, \hat{\Phi}_j, \Phi_j, K_w \right);$$

$$\frac{d\Omega}{dw} = K_w = y'' \left[1 + (y')^2 \right]^{-3/2} = y'' \cos^3 \Omega; \quad \frac{dx}{dw} = \cos \Omega; \quad \frac{dy}{dw} = \sin \Omega.$$

Замыкание ОДСС или ДС

Замкнутая система ОДСС

$$a_{ij} \left(\hat{\Phi}_j \right)_n + b_i K_w + c_{ij} \left(\Phi_j \right)_n + d_i \frac{\delta}{Y} + \varepsilon^2 \left[e_{ij} \left(\hat{\Phi}_j \right)_{nn} + f_i K_w' + g_{ij} \left(\Phi_j \right)_{nn} + N_i \right] = 0,$$

$$\Phi = (W, \theta, p, h)^T, \quad i, j = 1..4$$

$$\mathbf{X} = \left(\hat{W}_n, \hat{\theta}_n, K_w, \hat{h}_n \right)^T$$



неизвестный вектор производных

Замыкание ОДСС с помощью дифференциальной связи

1. Универсальный способ задания краевого эффекта в форме *расширенной дифференциальной связи*
2. *Исключающее условие* и его дифференциальное следствие в неравномерном потоке вязкого теплопроводного газа

Общий случай: «расширенная дифференциальная связь»

$$\hat{p}_s + b \cdot \hat{m}^{-\chi} \cdot \hat{p}_n = c, \quad \hat{m}^{-\chi} = \frac{-\chi}{\sqrt{\hat{M}^2 - 1}} = -\chi \operatorname{tg}(\hat{\alpha}_M)$$

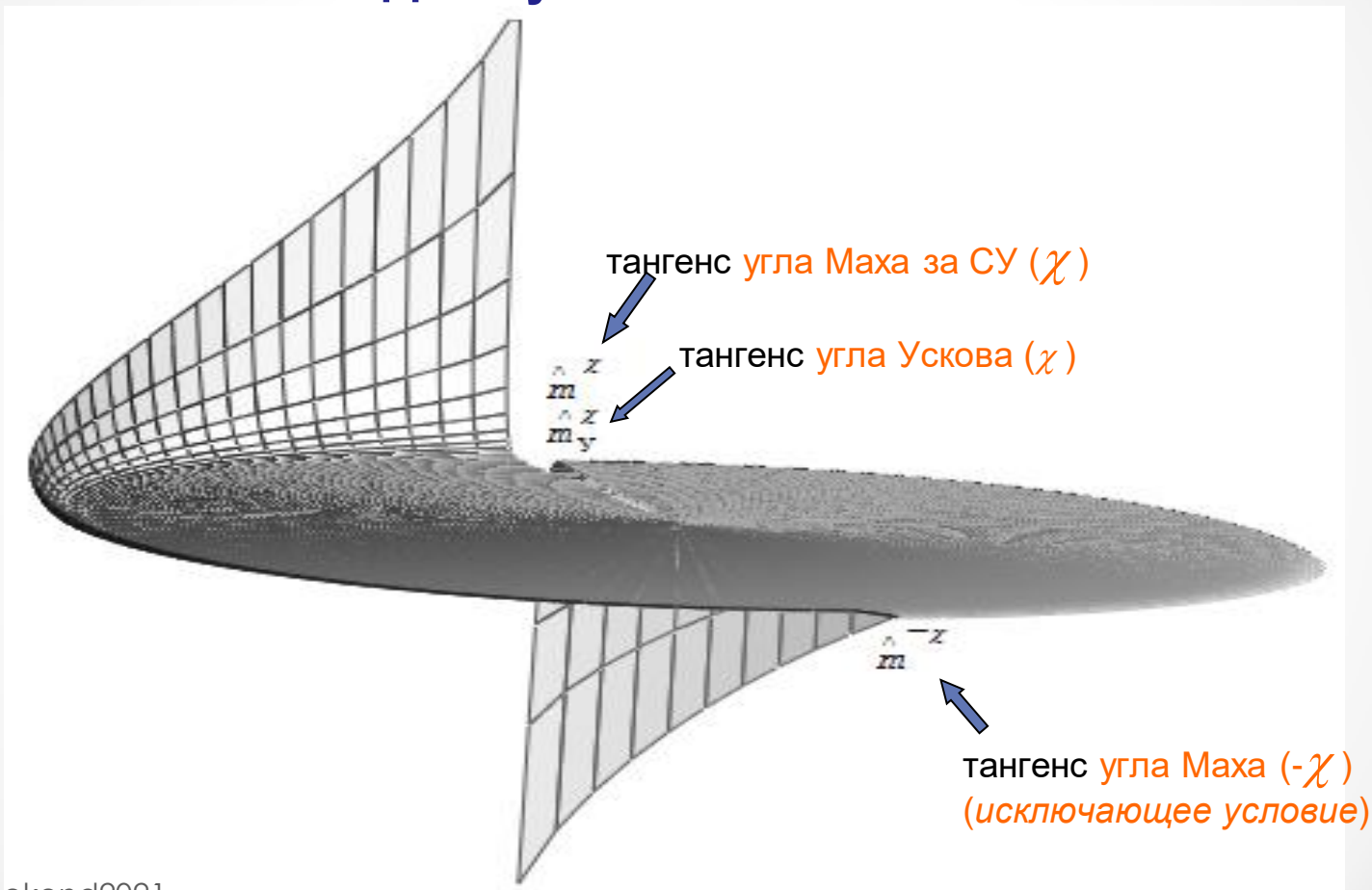
$c = 0$ – изобарическая связь (достоинства и недостатки!);

$c = 0, b = 1$ – «исключающее условие»;

$c = 0, b \approx -1$ – особый случай (!);

$c \neq 0$ – неизобарическая связь (реальные краевые эффекты).

Замыкание ОДСС: углы Маха и Ускова за СУ



Двухэтапная схема математического моделирования ударных течений вязкого теплопроводного газа при больших числах Рейнольдса на основе асимптотических ОДСС

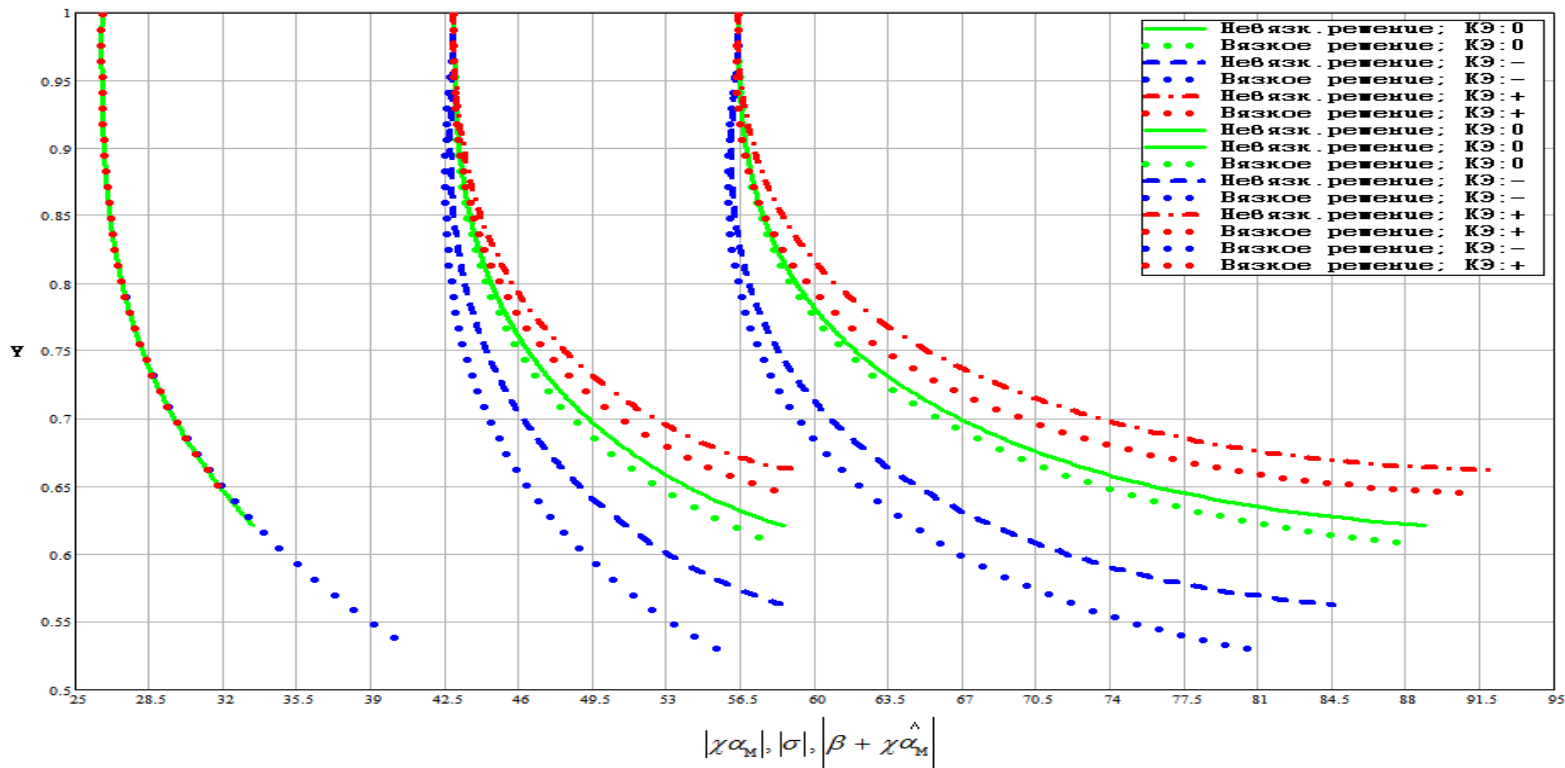
1. Аналитический этап.

- а) Генерация средствами компьютерной алгебры (REDUCE) ОДСС и следующей из них системы дифференциально-разностных *рабочих уравнений* (РУ) (система ОДУ), фиксирующей: конкретный вид *дифференциальной связи*, учет/неучет отдельных вторичных вязких членов, порядки асимптотических разложений и разностных аппроксимаций старших производных за СУ, газодинамические и другие константы, и т.п.;
- б) Экспортирование РУ, якобиана к ним и других необходимых для дальнейших вычислений сгенерированных аналитических продуктов в формате языка программирования FORTRAN.

2. Расчетный этап.

- а) Наполнение тела отдельных программных модулей в FORTRAN-среде продуктами *аналитического этапа*;
- б) Проведение необходимых расчетов в FORTRAN-среде.

Расчеты: влияние фактора ВТ (Вязкости-Теплопроводности) при различных КЭ



Характеристический коридор: модули углов наклона СУ и характеристик одного с ним семейства к линии тока в невозмущенном потоке (в градусах).



Ударные поляры, история..





Иллюстрация РО и МО с помощью поляр (ЛМИ (Военмех), 1977-1978)

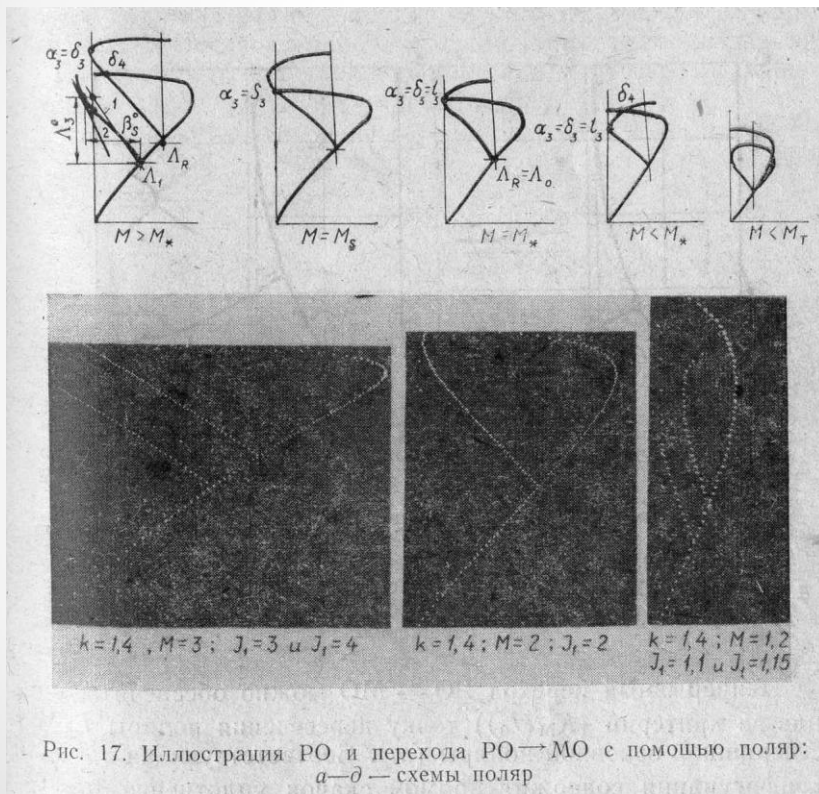
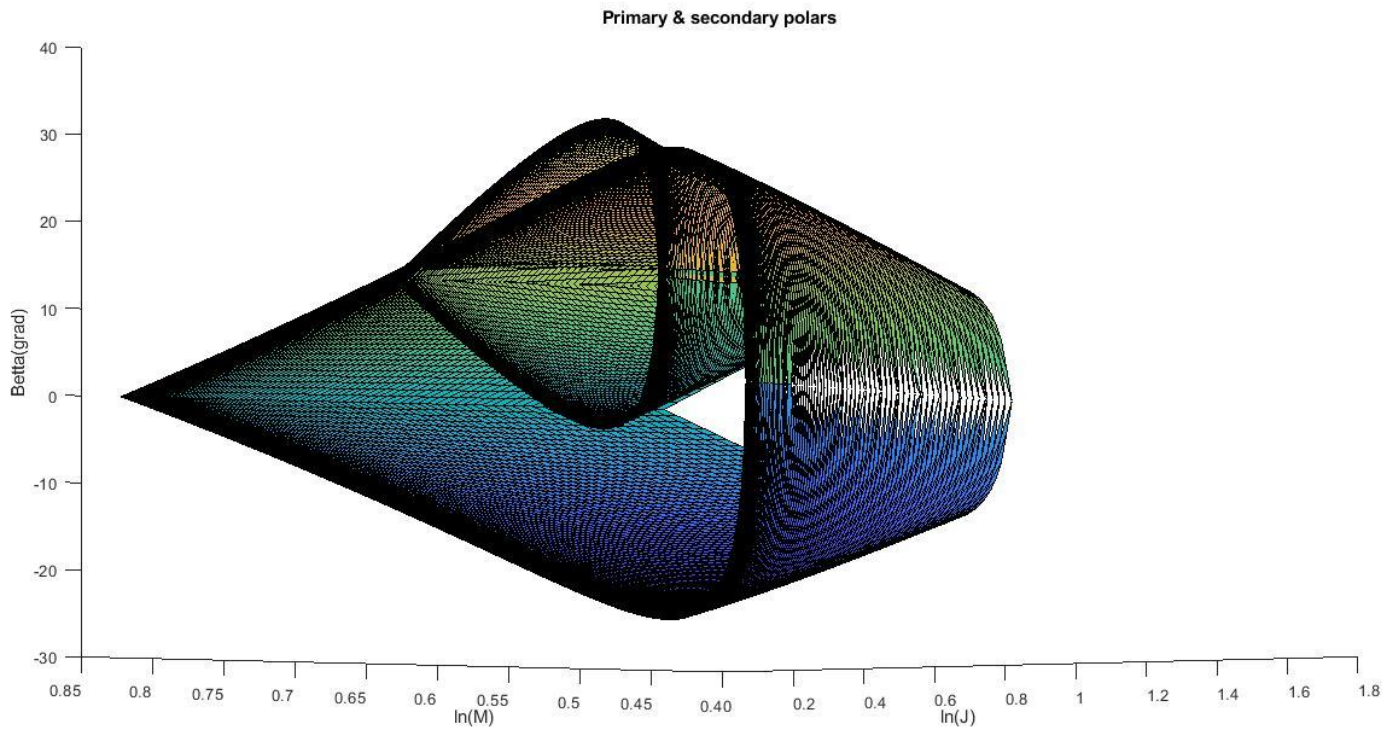


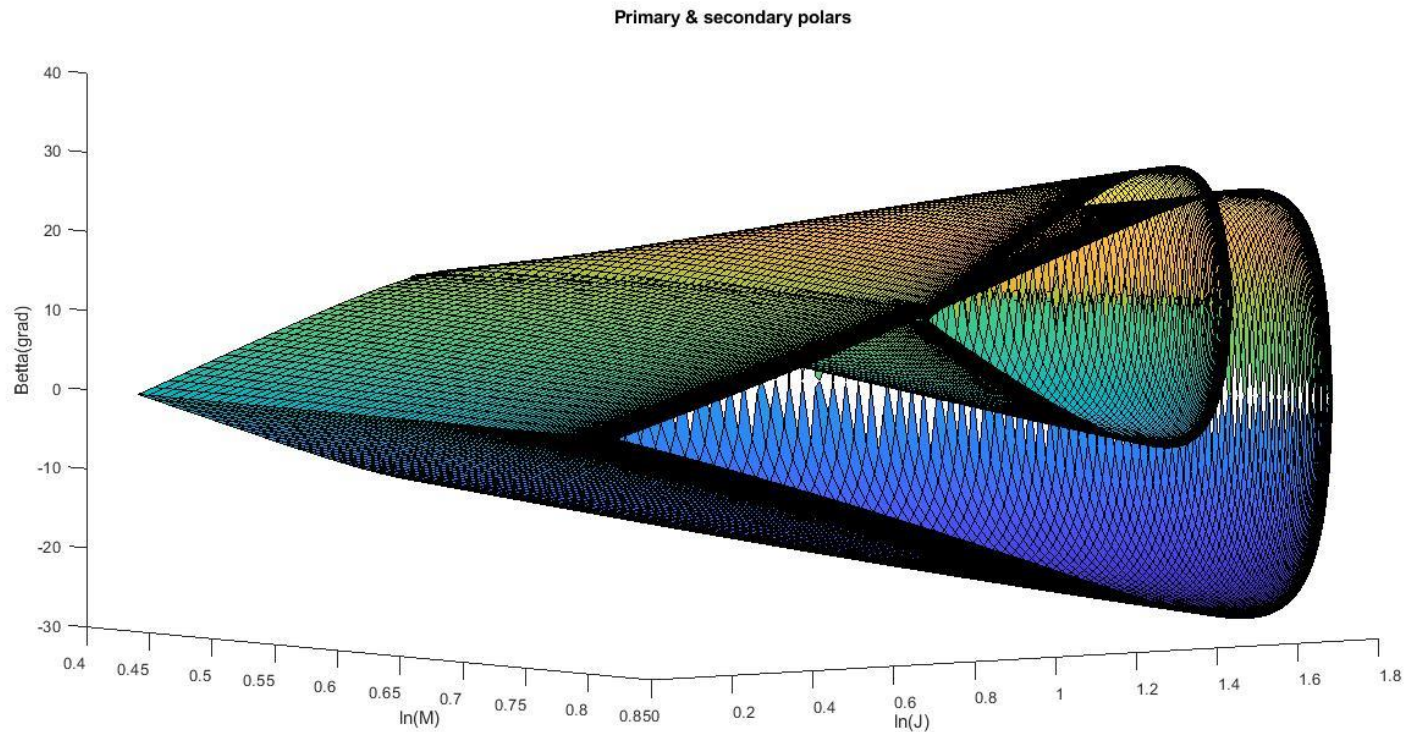
Рис. 17. Иллюстрация РО и перехода РО → МО с помощью поляр:
а—д — схемы поляр



Поляроиды



Поляроиды



Постановка вязкой задачи взаимодействия

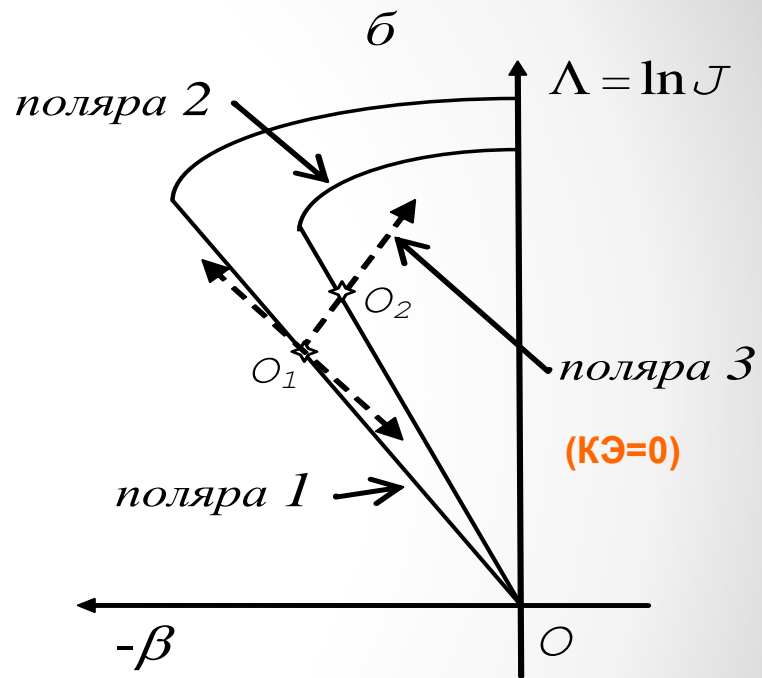
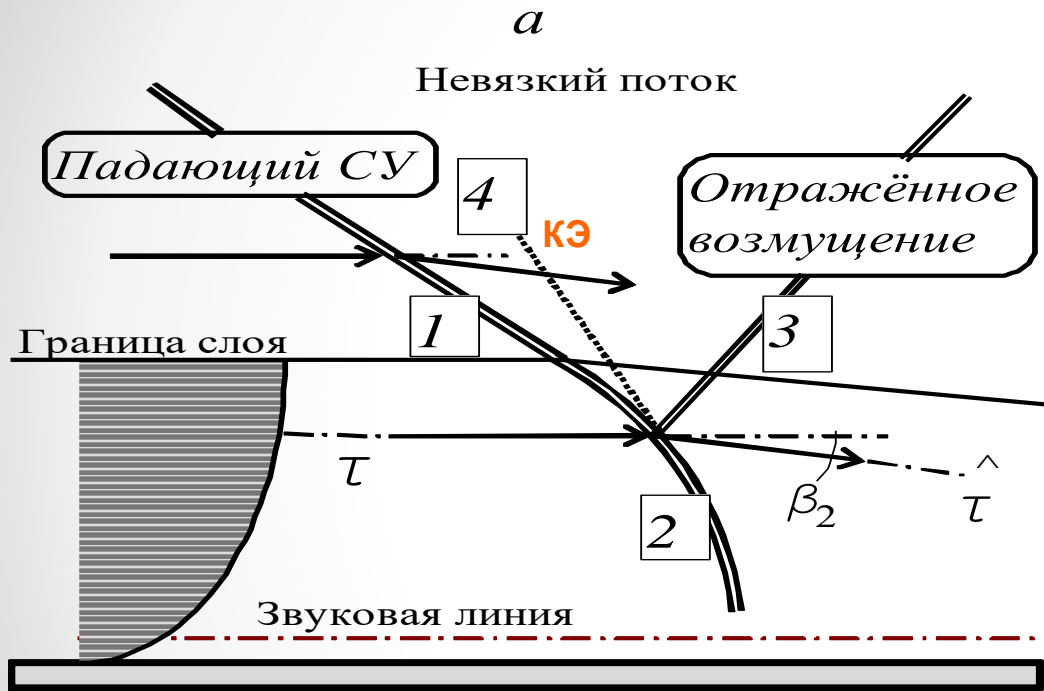
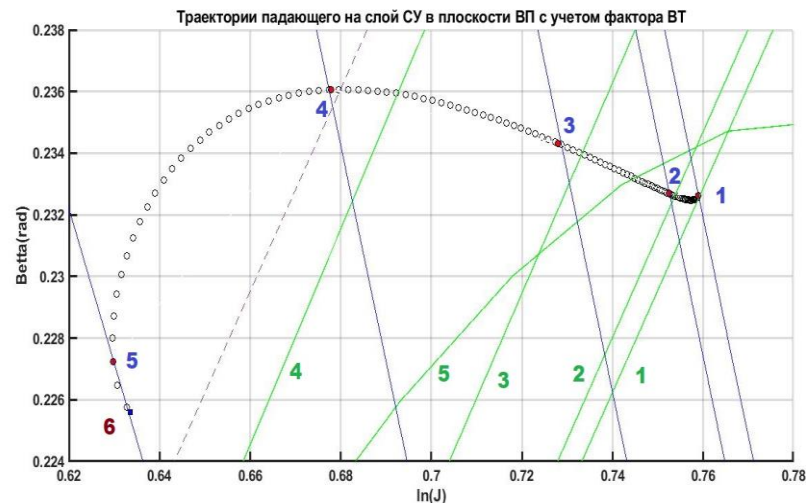
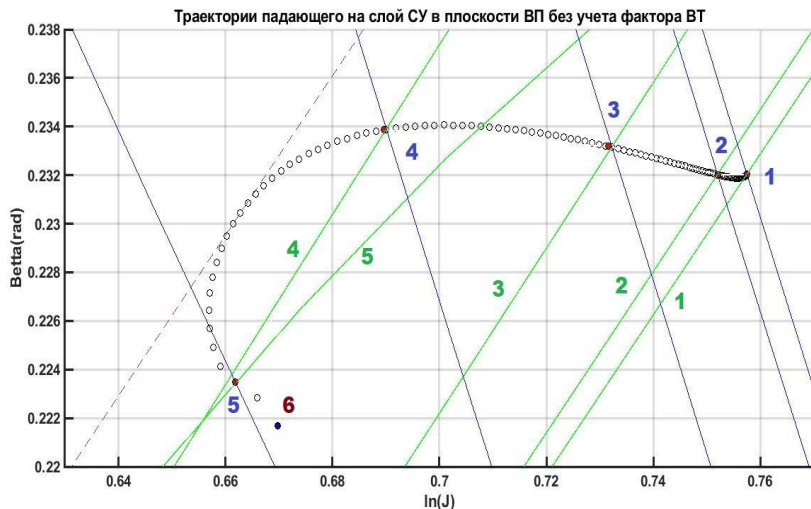


Схема взаимодействия скачка уплотнения со сдвиговым слоем:
а – физическая плоскость; *б* – плоскость поляр.

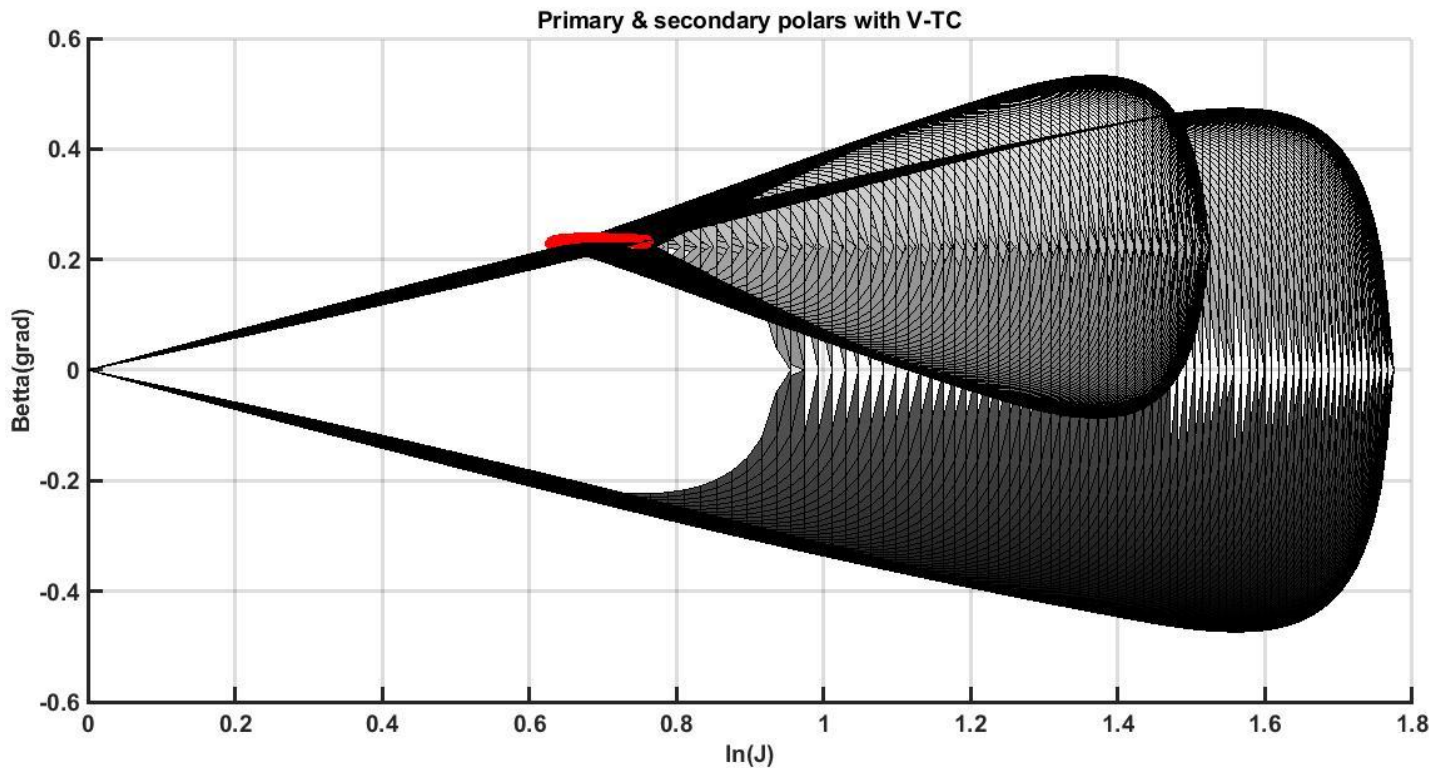
Траектории:



1-5 – основные УП и точки траектории, соответствующие пересечаемым в физическом пространстве линиям тока; 6 – последняя точка траектории СУ; пунктир – огибающая всех УП. Основные УП показаны зелеными линиями, идущими поперек линеаризованных вторичных УП

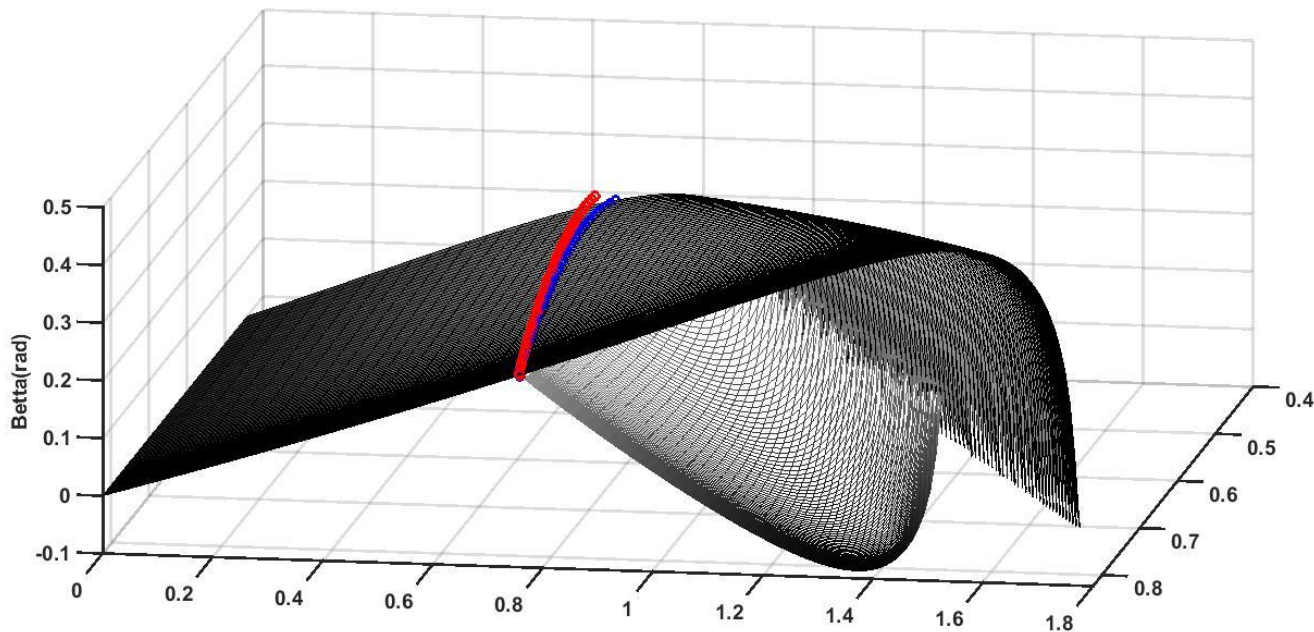


О некорректном применении аппарата ударно-волновых поляр (фактор ВТ присутствует)





О некорректном применении аппарата ударно-волновых поляр (фактор ВТ присутствует)



Отображение траектории падающего на слой СУ на поверхность поляроида.
Синий цвет – без учета фактора ВТ. Красный цвет – с учетом фактора ВТ



ВЫВОДЫ..

Показано, что в редких случаях при одновременном действии нескольких факторов: 1) неравномерности течения перед СУ, 2) краевого эффекта за ним и 3) действующего фактора ВТ – весьма распространённый способ отображения ударного решения на плоскость ударных поляр или объёмный (3D) поляроид может быть и некорректным..
• • •

Таким образом, ДОКАЗАНО, что при использовании даже «идеальных» (отсутствуют: схемная/искусственная вязкость, лимитеры) вычислительных методик данное явление может иметь место..



Спасибо за внимание!